SOLUZIONI (schematiche) degli ESERCIZI

E 1 Fare un disegno le (E.1) e (E.2) saranno autoevidenti.

Se si vuole procedere in modo formale notare che possiamo scrivere $A \cup B$ nella forma $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ ove $C_1 = A - (A \cap B)$, $C_2 = (A \cap B)$, $C_3 = B - (A \cap B)$. Poichè questi tre insiemi sono senza sovrapposizione si ha $P(A \cup B) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3)$, a questo punto poichè C_1 e $A \cap B$ sono disgiunti e $A = C_1 \cup (A \cap B))$, allora $P(C_1) = P(A) - P(A \cap B)$, analogamente $P(C_3) = P(B) - P(A \cap B)$, da cui segue la (E.1). In modo del tutto analogo si ottiene la (E.2).

E 2 Dalla (E.1) abbiamo che $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, poichè $P(A \cup B) \leq 1$ segue $P(A \cap B) \geq 3/4 + 1/3 - 1 = 1/12$.

E1 3 Usando la (E.1) si ha

$$P((\Omega - A) \cap (\Omega - B)) = P(\Omega - A) + P(\Omega - B) - P((\Omega - A) \cup (\Omega - B))$$

poichè $P((\Omega - A) \cup (\Omega - B)) \leq 1$, $P(\Omega - A) = 1 - P(A)$ e $P(\Omega - B) = 1 - P(B)$, si ha $P((\Omega - A) \cap (\Omega - B)) > 1 - P(A) - P(B) = 1 - 4/10 - 3/10 = 3/10$ quindi non possono esistere due insiemi A e B che soddisfano le richieste.

E 4 Usando la notazione

$$C_{N,k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \ ,$$

il numero di possibili estrazioni è $C_{90,5}$. Per calcolare la probabilità di avere un ambo, cioè che escano due numeri dati (n_1, n_2), si deve determinare il numero dei casi favorevoli del tipo $(n_1, n_2, m_1, m_2, m_3)$ ove i numeri m_1, m_2 ed m_3 sono estratti dai restanti 88 numeri, abbiamo quindi

$$P(ambo) = \frac{C_{88,3}}{C_{90,5}} = \frac{2}{801} \ ,$$

in modo analogo

$$P(singolo\ estratto) = \frac{C_{89,4}}{C_{90,5}} = \frac{1}{18} \ ,$$

$$P(terno) = \frac{C_{87,2}}{C_{90,5}} = \frac{1}{11748} \ ,$$

$$P(quaterna) = \frac{C_{86,1}}{C_{90,5}} = \frac{1}{511038} \ .$$

E 5 a)Indichiamo con $P = 1/6$ la probabilità di avere un 6 in un lancio, si hanno due possibilità: 6 al primo lancio oppure al secondo, la probabilità cercata è $2(1-P)P$.

b) la probabilità di avere un numero pari in un lancio è $p = 1/2$, la probabilità che entrambi i numeri siano pari è p^2

c) si hanno 3 possibilità indipendenti $(1,3),(2,2)$ e $(3,1)$ quindi la probabilità che la somma dei numeri sia 4 è $3P^2$

d) la somma dei numeri è un multiplo di 3 se è 3, 6, 9 oppure 12; si può avere 3 in 2 modi $(1,2)$ e $(2,1)$; 6 può avvenire in 5 modi $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,2)$, e $(5,1)$ 9 può avvenire in 4 modi $(3,6)$,$(4,5)$, $(5,4)$, e $(6,3)$; 12 in un solo modo $(6,6)$ quindi la probabilità cercata è $12P^2$.

E 6 Indichamo con $P = 1/2$ la probabilità di avere testa in un lancio

a) $(1-P)^{N-1}P$

b) $C_{N,N/2}P^{N/2}(1-P)^{N/2}$

c) $C_{N,2}P^2(1-P)^{N-2}$

d) $1 - C_{N,0}(1-P)^N - C_{N,1}P(1-P)^{N-1} = 1-(1-P)^N - NP(1-P)^{N-1}$.

E 7 Indichiamo con $P_I = 2/3$ e $P_{II} = 1/3$ rispettivamente le probabilità che un pezzo sia prodotto dall' industria I oppure II, con $P(d|I) = 1/5$ e $P(d|II) = 1/50$ le probabilità condizionate di avere un pezzo difettoso proveniente dall' industria I oppure II.

a) Usando il teorema della probabilità totale

$$P(un\ pezzo\ difettoso) = P(d) = P(d|I)P_I + P(d|II)P_{II} \ .$$

b) Usando la formula di Bayes

$$P(I|d) = P(d|I)\frac{P_I}{P(d)} \ .$$

E 8 Poichè $P(X=k) = P(Y=k) = 2^{-k}$ si ha

$$a) \ \ P(X=Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)P(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} = \frac{1}{3} \ ,$$

b) Notiamo che $P(X<Y) = P(Y<X)$ e $P(X<Y)+P(Y<X)+P(X=Y) = 1$ dal risultato precedente $P(X<Y) = 1/3$

$$c) \ \ P(X\ triplo\ di\ Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=3k)P(Y=k) = \sum_{k=1}^{\infty} 16^{-k} = \frac{1}{15} \ .$$

E 9 La probabilità che nascano $n-1$ femmine ed un maschio all'n-mo tentativo è $(1-P)^{n-1}P$; il numero medio di maschi è 1, infatti per ogni P si ha

$$< n_m > = \sum_{n=1}^{\infty} (1-P)^{n-1}P = 1 \ .$$

Il numero medio di femmine è

$$< n_f > = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(1-P)^{n-1}P = \frac{1-P}{P} \ ,$$

per $P = 1/2$, $< n_f >= 1$.

E 10 La probabilità che $Y_n < y$ è

$$F_{Y_N}(y) = \prod_{n=1}^{N} P(x_n < y) = F_X(y)^N$$

quindi

$$p_{Y_N}(y) = N F_X(y)^{N-1} p_X(y) \ .$$

In modo analogo la probabilità che $Z_n < z$ è

$$F_{Z_N}(z) = 1 - \prod_{n=1}^{N} P(x_n > z) = 1 - \Big(1 - F_X(z)\Big)^N$$

da cui

$$p_{Z_N}(z) = N\Big(1 - F_X(z)\Big)^{N-1} p_X(z) \ .$$

E 11 Usiamo le variabili polari

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ , \ \theta = atang\, z = atang\, \frac{x_2}{x_1} \ ,$$

poichè

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x_1^2+x_2^2)/2}$$

ed inoltre $dx_1 dx_2 = r dr d\theta$, la densità di variabili per (r, θ) è

$$p_{r,\theta}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} r e^{-r^2/2}$$

quindi

$$p_r(r) = r e^{-r^2/2} \quad , \ p_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \ .$$

Usando il cambio di variabili da θ a $z = tang\, \theta$, si badi in $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ in modo che la trasformazione sia invertibile, poichè $dz/d\theta = 1 + z^2$, si ha

$$p_z(z) = \frac{1}{\pi(1 + z^2)} \ .$$

E 12 In quanto combinazioni lineari di variabili gaussiane z e q sono ancora gaussiane, è immediato verificare che sono scorrelate, quindi, poichè variabili gaussiane sono anche indipendenti.

E 13 Usare il risultato dell' esercizio **E 11**.

E 14 Indichiamo con X ed Y i tempi di arrivo (in minuti), si ha un incontro se $|x-y|<5$ quindi poichè la probabilità è uniforme

$$P(incontro) = \frac{1}{60^2}\int\int_{|x-y|<5} dxdy$$

ove x ed y variano tra 0 e 60 quindi $P(incontro) = 1-(11/12)^2 = 23/144$.

E 15 Notare che $G(s)$ è la parte reale di una funzione analitica. Ricordarsi del teorema di Abel sulle serie di potenze.

E 16 La variabile $Z = X+Y$ è Poissoniana con parametro $\lambda_z = \lambda_x + \lambda_y$. Poichè Y ed X sono indipendenti $P(X=k, X+Y=n) = P(X=k)P(Y=n-k)$. Ricordando che

$$P(X=k) = e^{-\lambda_x}\frac{\lambda_x^k}{k!} \ , \ P(Y=k) = e^{-\lambda_y}\frac{\lambda_y^k}{k!} \ , \ P(Z=n) = e^{-\lambda_z}\frac{\lambda_z^n}{n!} \ ,$$

abbiamo

$$P(X=k|X+Y=n) = \frac{P(X=k)P(Y=n-k)}{P(Z=n)} =$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}\ \Big(\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_y}\Big)^k\Big(1-\frac{\lambda_x}{\lambda_x+\lambda_y}\Big)^{n-k}$$

cioè la X, condizionata a $X+Y=n$, ha una distribuzione binomiale.

E 17 La probabilità di avere 6 in un lancio è $P = 1/6$, la probabilità di avere 6 per la prima volta all'n-mo lancio è $P_n = (1-P)^{n-1}P$ ed il numero medio è

$$<n> = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-P)^{n-1}P = \frac{1}{P} = 6 \ .$$

E 18 Si consideri il risultato dell' esercizio precedente. Al primo tentativo si ha sicuramente un numero, dopo la probabilità di avere un numero diverso è $4/5$, quindi il numero medio di scatole da comprare è $5/4$, per il terzo numero il numero medio è $5/3$ e così via. Il numero medio di scatole da comprare per avere un omaggio è quindi

$$1+\frac{5}{4}+\frac{5}{3}+\frac{5}{2}+5 = 5\Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\Big) \ .$$

Nel caso con N bollini si ha

$$N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \quad ,$$

nel limite $N \gg 1$ vale l' approssimazione $N(\ln N + \gamma)$ ove $\gamma = 0.57721..$ è la costante di Eulero- Mascheroni.

E 19 Usando le proprietà della delta di Dirac abbiamo:

$$p_Z(z) = \int\int p_X(x)p_Y(y)\delta(z-xy)dydx = \int\int p_X\Big(\frac{z}{y}\Big)p_Y(y)\frac{dy}{|y|}$$

$$p_Q(q) = \int\int p_X(x) p_Y(y) \delta\Big(q - \frac{x}{y}\Big) dy dx = \int\int p_X(qy) p_Y(y) |y| dy \ .$$

E 20 Un calcolo esplicito mostra che $P(X = i) = P(Y = i) = 1/3$ per ogni i ed inoltre

$$\langle XY \rangle = 0 \ , \ \langle X \rangle = 0 \ , \ \langle Y \rangle = 0 \ .$$

Notiamo che

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{3} \neq P(X = 0) P(Y = 0) = \frac{1}{9} \ .$$

E 21 Usare le formule di convoluzione per la somma di variabili indipendenti.

E 22 Calcoliamo la funzione caratteristica della x_N

$$\phi_{x_N}(t) = \prod_{j=1}^{N} \Big[\frac{1 + e^{it2^{-j}}}{2} \Big] \ ,$$

notando che

$$1 + e^{it2^{-j}} = \frac{1 - \left(e^{it2^{-j}}\right)^2}{1 - e^{it2^{-j}}} = \frac{1 - e^{it2^{-(j-1)}}}{1 - e^{it2^{-j}}} \ ,$$

possiamo scrivere

$$\phi_{x_N}(t) = \frac{1}{2^N} \prod_{j=1}^{N} \Big[\frac{1 - e^{it2^{-(j-1)}}}{1 - e^{it2^{-j}}} \Big] = \frac{1}{2^N} \Big[\frac{1 - e^{it}}{1 - e^{it2^{-N}}} \Big]$$

nel limite $N \gg 1$

$$\phi_{x_N}(t) \simeq \frac{1 - e^{it}}{-it}$$

che è la funzione caratteristica della densità di probabilità uniforme in $[0, 1]$.

Nel caso generale con un calcolo del tutto analogo si ha:

$$\phi_{x_N}(t) = \frac{1}{M^N} \prod_{j=1}^{N} \Big[\sum_{k=0}^{M-1} e^{itkM^{-j}} \Big] = \frac{1}{M^N} \prod_{j=1}^{N} \Big[\frac{1 - e^{itM^{-(j-1)}}}{1 - e^{itM^{-j}}} \Big] = \frac{1}{M^N} \Big[\frac{1 - e^{it}}{1 - e^{itM^{-N}}} \Big]$$

nel limite $N \gg 1$

$$\phi_{x_N}(t) \simeq \frac{1 - e^{it}}{-it} \ .$$

E 23 Il calcolo (facile) della funzione caratteristica della variabile gaussiana x_k con m_k e varianza σ_k^2 fornisce

$$\phi_{x_k} = e^{im_k t - \sigma_k^2 t^2/2}$$

usando l'indipendenza si ha

$$\phi_y = e^{iM_N t - S_N^2 t^2/2}$$

ove

$$M_N = \sum_{k=1}^{N} m_k \quad , \quad S_N = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^2$$

da cui il risultato.

E 24 Effettuare un cambiamento di variabili:

$$x_j = \sum_n C_{jn} z_n$$

in modo tale che le $\{z_n\}$ siano a media nulla ed indipendenti: $< z_n z_j >= \delta_{jn}$. Questo è sempre possibile in quanto la matrice $A_{ij} =< x_i x_j >$ è simmetrica, abbiamo

$$y = \sum_{j,n} C_{jn} z_n$$

e si può utilizzare il risultato dell' esercizio precedente, quindi y è gaussiana con

$$< y >= 0 \qquad < y^2 >=< (\sum_n x_n)^2 >= \sum_n < x_n^2 > +2 \sum_{j<k} < x_j x_k >$$

da cui il risultato.

E 25 Il calcolo del volume dello spazio delle fasi con energia minore di E si riduce a quello del volume di una sfera di raggio $\sqrt{2mE}$ in $d = 2N$ dimensioni. Ricordando che il volume di una sfera d- dimensionale di raggio R è *cost.* R^d (il valore della costante è inessenziale) si ha

$$\Sigma(E) = \int_{H<E} d^{2N}\mathbf{q} d^{2N}\mathbf{p} = const.\, L^{2N} (\sqrt{2mE})^{2N} = CE^N$$

il valore di C non è importante:

$$\omega(E) = \frac{\partial \Sigma(E)}{\partial E} = cost.\, E^{N-1} \ .$$

Poichè

$$p(E) = cost.\, \omega(E) e^{-\beta E}$$

abbiamo

$$p(E) = \frac{E^{N-1} e^{-E/k_B T}}{\int_0^\infty E^{N-1} e^{-E/k_B T} dE} = \frac{E^{N-1} e^{-E/k_B T}}{(k_B T)^N \Gamma(N)} \ ,$$

che assume il suo valore massimo in $E^* = (N-1) k_B T$.

Il calcolo dei momenti $< E^n >$ è immediato (basta ricordarsi della definizione della funzione gamma di Eulero):

$$< E^n >= \frac{\int_0^\infty E^{N+n-1} e^{-E/k_B T}}{(k_B T)^N \Gamma(N)} = (k_B T)^n \frac{\Gamma(N+n)}{\Gamma(N)} \quad , \quad < E >= N k_B T \ ,$$

da cui il risultato.

E 26 Con un opportuno cambiamento di variabile:

$$x_j = \sum_n C_{jn} z_n$$

l'Hamiltoniana viene diagonalizzata, notare che questo è sempre possibile in quanto la matrice A_{ij} è simmetrica, si ha quindi

$$H = \sum_{n=1}^{N} \Big[\frac{p_n^2}{2m} + a_n x_n^2 \Big]$$

ove $\{a_n\}$ sono gli autovalori positivi della matrice $\{A_{n,j}\}$, a questo punto il problema è del tutto analogo al precedente.

E 27 Poichè il sistema è in equilibrio termico a temperatura T la densità di probabilità congiunta delle posizione delle particelle leggere e di quella pesante è

$$p(x_1, x_2, ..., x_N, X) = cost.\, e^{-\beta V(x_1, x_2, ..., x_N, X)}$$

ove

$$V(x_1, x_2, ..., x_N, X) = \begin{cases} FX \quad se\ per\ ogni\ n\ x_n \in [0,\, X] \\ \infty \quad altrimenti \end{cases}$$

abbiamo quindi

$$p(x_1, x_2, ..., x_N, X) = cost. \prod_{n=1}^{N} \theta(X - x_n) e^{-\beta F X}$$

ove $\theta(\ )$ è la funzione gradino. Per ottenere la densità di probabilità (marginale) della X, si deve integrare su $x_1, x_1, ..., x_N$:

$$p(X) = cost.\, X^N e^{-\beta F X} = \frac{(\beta F)^{N+1}}{N!} X^N e^{-\beta F X} \ ,$$

ove la costante di normalizzazione è determinata utilizzando le funzioni gamma.

Per il caso b) nel calcolo della nuova densità di probabilità $\tilde{p}(X)$ si deve tenere conto del vincolo che una delle $\{x_n\}$ vale zero quindi

$$\tilde{p}(X) = cost. \int \prod_{n=1}^{N} \theta(X - x_n) \sum_{n=1}^{N} \delta(x_n)\, e^{-\beta F X}\, dx_1, dx_2, ...dx_N =$$

$$\frac{(\beta F)^N}{(N-1)!} X^{N-1} e^{-\beta F X} \ .$$

E 28 Un semplice calcolo di analisi complessa mostra che

$$\phi_{x_j}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{\pi(1+x^2)} dx = e^{-|t|} \ ,$$

poichè

$$\phi_y(t) = \Big[\phi_x(t/N)\Big]^N = e^{-|t|} \ ,$$

abbiamo che la densità di probabilità della variabile Y è

$$p_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \ .$$

Poichè la varianza delle $\{x_j\}$ è infinita non si può utilizzare la legge dei grandi numeri.

E 29 Consideriamo $n_1, n_2, ..., n_N$ variabili i.i.d. Poissoniane con

$$P(n_j = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

la variabile $S_N = n_1 + n_2 + ... + n_N$ è ancora Poissoniana con

$$P(S_N = k) = \frac{(\lambda N)^k}{k!} e^{-\lambda N} \ .$$

Quindi se $\lambda = 1$

$$P(S_N \leq N) = e^{-N}\Big(1 + N + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} + ... + \frac{N^N}{N!}\Big) \ .$$

Se $N \gg 1$ allora, poichè $< n_j >= \sigma_{n_j} = 1$, per il TLC la probabilità precedente può essere calcolata nel seguente modo

$$\lim_{N\to\infty} P(\frac{S_N - N}{\sqrt{N}} \leq 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} \ ,$$

da cui il primo risultato.

In modo analogo abbiamo

$$P(x_1 \leq \frac{S_N - N}{\sqrt{N}} \leq x_2) = e^{-N} \sum_{k=[N+x_1\sqrt{N}]}^{[N+x_2\sqrt{N}]} \frac{N^k}{k!} \ .$$

Nel limite $N \to \infty$ possiamo utilizzare il TLC e quindi

$$\lim_{N\to\infty} e^{-N} \sum_{k=[N+x_1\sqrt{N}]}^{[N+x_2\sqrt{N}]} \frac{N^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx \ .$$

E 30 Una volta sorteggiata una velocità positiva v il tempo di attraversamento da $x = 0$ ad $x = L$ è $\Delta t(v) = L/v$, e questo è anche il tempo di ritorno. Consideriamo il caso con $v > 0$: in un intervallo di tempo T molto lungo si hanno $N \gg 1$ sorteggi, per la legge dei grandi numeri abbiamo che la frazione di volte in cui $\Delta t \in [\Delta t(v),\ \Delta t(v - dv)]$ è

$$F(v, dv) = cost.\, g(v)\, dv \ ,$$

per calcolare la frazione di tempo in cui si ha una velocità nell' intervallo $[v - dv,\ v]$ si deve moltiplicare $F(v, dv)$ per $\Delta t(v) = L/v$, abbiamo quindi

$$p_V(v) = cost. \frac{g(v)}{v} \ .$$

Per simmetria si ha lo stesso risultato nel caso $v < 0$, quindi:

$$p_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} \ .$$

Notando che una volta estratta una v la frazione del tempo di permanenza in $[x - \Delta x,\ x]$ è indipendente da x e da v, si ha

$$p_X(x) = \frac{1}{L} \ .$$