Meccanica Statistica
A.A. 2014-2015 – 11 maggio 2015
Appello straordinario

UN solo libro.
Scrivere sul primo foglio in alto, a sinistra, in stampatello,
N*ome (solo iniziale) e* COGNOME, *ad es.* L. BOLTZMANN

Un gas, costituito da N particelle identiche, contenute in una sfera di raggio R e non interagenti tra loro, si trova in equilibrio a temperatura T. La Hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r)\,,$$

in cui $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ e

$$V(r) = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq r < R_0 < R\,,$$

$$V(r) = V_0 \quad \text{per} \quad R_0 < r \leq R\,.$$

Si assuma che sia applicabile la statistica classica e si calcoli:

a) la pressione sulla superficie della sfera di raggio R in cui è contenuto il gas;

b) $p(\epsilon)$, densità di probabilità dell' energia ϵ di una particella.

Considerando le particelle fermioni di spin 1/2,

c) calcolare U_0, l'energia del sistema a $T = 0$, nel caso in cui l' energia di Fermi valga $2V_0$.

SOLUZIONE

a) La relazione termodinamica

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V}\Big|_{T,N}$$

nel caso di un gas perfetto si scrive

$$P = \frac{\partial}{\partial V} NkT \ln(z\, e/N)\Big|_{T,N}$$

e in questo caso si ha:

$$z = \frac{1}{h^3}\int \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{p}\, e^{-\beta H(\mathbf{x},\mathbf{p})} = \frac{1}{\lambda^3}\left(\int_{r<R_0}\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{R_0<r<R}\mathrm{d}\mathbf{x}e^{-\beta V_0}\right)\,,$$

avendo introdotto la lunghezza d'onda termica

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\,.$$

Tenendo conto del fatto che in questo sistema

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e quindi} \quad \mathrm{d}V = 4\pi R^2 \mathrm{d}R$$

si ottiene

$$P = \frac{NkT}{4\pi R^2}\,\frac{\partial}{\partial R}\ln(ze/N) = \frac{NkT}{4\pi R^2}\,\frac{\partial}{\partial R}\ln\left(1 + e^{-\beta V_0}\Big[(R/R_0)^3 - 1\Big]\right)$$

e alla fine

$$P = kT\frac{Ne^{-\beta V_0}}{(4/3)\pi R_0^3\left(1 + e^{-\beta V_0}\Big[(R/R_0)^3 - 1\Big]\right)}\,.$$

Si noti che quest'ultima espressione è anche interpretabile come

$$P = kT\, n\Big(|\mathbf{x}| = R\Big)$$

dove $n(|\mathbf{x}| = R)$ è la densità di particelle in un punto qualunque della superficie della sfera.

b) Dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann

$$\rho(x,p) = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{x},\mathbf{p})}}{\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{p}' e^{-\beta H(\mathbf{x}',\mathbf{p}')}} = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{x},\mathbf{p})}}{h^3\ z} \ ,$$

integrando sugli stati con energia ϵ, si ottiene

$$p(\epsilon) = \frac{\omega(\epsilon)\ e^{-\beta\epsilon}}{h^3\ z} \ ,$$

dove

$$\omega(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}\Sigma(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int\limits_{H\le\epsilon} \mathrm{d}\mathbf{x}\ \mathrm{d}\mathbf{p} \ .$$

Si ha:

$$\Sigma(\epsilon) = \int\limits_{[r<R_0 \big| p^2/2m\le\epsilon]} \mathrm{d}\mathbf{x}\ \mathrm{d}\mathbf{p} + \theta(\epsilon - V_0) \int\limits_{[R_0<r<R \big| p^2/2m+V_0\le\epsilon]} \mathrm{d}\mathbf{x}\ \mathrm{d}\mathbf{p}$$

(si osservi che il secondo contributo è presente solamente per energie $\epsilon > +V_0$ e la funzione gradino θ tiene conto di ciò)

$$\Sigma(\epsilon) = \frac{4}{3}\pi R_0^3\ \frac{4}{3}\pi(2m\epsilon)^{3/2} + \theta(\epsilon - V_0)\ \frac{4}{3}\pi(R^3 - R_0^3)\ \frac{4}{3}\pi[2m(\epsilon - V_0)]^{3/2} \ .$$

Derivando la Σ si ricava

$$\omega(\epsilon) = \frac{8}{3}\pi^2(2m)^{3/2}R_0^3\Big(\epsilon^{1/2} + \theta(\epsilon - V_0)\ (\epsilon - V_0)^{1/2}[(R/R_0)^3 - 1]\Big)$$

da cui si ottiene il risultato finale

$$p(\epsilon) = \frac{\Big(\epsilon^{1/2} + \theta(\epsilon - V_0)\ (\epsilon - V_0)^{1/2}[(R/R_0)^3 - 1]\Big)e^{-\beta\epsilon}}{(\sqrt{\pi}/2)(kT)^{3/2}\Big(1 + e^{-\beta V_0}\big[(R/R_0)^3 - 1\big]\Big)}$$

c) Indicando con $G(\epsilon) = (2/h^3)\ \omega(\epsilon)$ la densità degli stati con energia ϵ per una singola particella (2 è la degenerazione dovuta allo spin), l' energia del sistema a $T = 0$ si scrive

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon\, G(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon \ .$$

Ponendo
$$\gamma = \frac{8}{3}\pi^2(2m)^{3/2}(R_0/h)^3 \ ,$$
e tenendo conto del fatto che, essendo $\epsilon_F > V_0$, anche il fattore proporzionale alla θ contribuisce all'integrale, si ha
$$U_0 = \int_0^{2V_0} \epsilon \ \gamma \ \epsilon^{1/2} \ \mathrm{d}\epsilon + \int_{V_0}^{2V_0} \epsilon \ \gamma \ [(R/R_0)^3 - 1] \ (\epsilon - V_0)^{1/2} \ \mathrm{d}\epsilon \ ;$$
nel secondo integrale si può introdurre la variabile $t = \epsilon - V_0$:
$$U_0 = \frac{2}{5}\gamma(2V_0)^{5/2} + \gamma \, [(R/R_0)^3 - 1]\left(\int_0^{V_0} (t^{3/2} + V_0 t^{1/2})\mathrm{d}t \ \right),$$
da cui
$$U_0 = \frac{2}{5}\gamma V_0^{5/2}\left(2^{5/2} + \frac{8}{3}[(R/R_0)^3 - 1]\right)$$