Corso di Meccanica Statistica
Proff. M. Falcioni, A. Vulpiani
Compito del 01/07/2014

Scrivere in stampatello COGNOME e N. (iniziale del nome)
(Esempio: ROSSI M.)

Si consideri un gas unidimensionale costituito da N particelle identiche, non interagenti, che si muovono sulla semiretta $x \geq 0$, con Hamiltoniana di singola particella data da

$$\mathcal{H} = a\,|p| + V(x) + \frac{V_0}{2}(\sigma + 1)\ , \tag{1}$$

dove a e V_0 sono due costanti positive, σ è una variabile discreta che può assumere due valori: $\sigma = \pm 1$ e il potenziale $V(x)$, costante a tratti, è così definito:

$$V(x) = V_0\, j \quad \text{se} \quad jL \leq x < (j+1)L$$

con $j = 0, 1, 2, ...$

A) Supponendo che valga la statistica classica e che il gas sia in equilibrio a temperatura T, i calcoli:

1) l' energia media per particella, $U(T)/N$;

2) la probabilità che una data particella si trovi nell' intervallo $L < x < 2L$, indipendentemente dal valore di σ e di p;

3) il numero medio di particelle con $\sigma = +1$, $x < L$ e p qualunque.

B) Nel caso che le particelle siano fermioni di spin 1/2 a $T = 0$, sapendo che $\epsilon_F < V_0$, si calcoli:

4) $\langle \sigma \rangle$;

5) l' energia del sistema $U(T = 0)$.

C) Nel caso che le particelle siano bosoni di spin 0, discutere l' esistenza o meno della condensazione di Bose-Einstein.

SOLUZIONE

A$_1$) Per un gas perfetto

$$U = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln z \; ,$$

dove, in questo caso

$$z = \frac{1}{h} \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \; e^{-\beta [a|p|]} \; e^{-\beta [V(x)]} \; e^{-\beta [(\sigma+1)(V_0/2)]} \; .$$

Si ha:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-\beta \, V(x)} = \int_0^{L} \mathrm{d}x + \int_L^{2L} \mathrm{d}x \, e^{-\beta \, V_0} + \int_{2L}^{3L} \mathrm{d}x \, e^{-\beta \, V_0 \, 2} \; + \cdots$$

quindi

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-\beta \, V(x)} = L + L \, e^{-\beta \, V_0} + L \left(e^{-\beta \, V_0} \right)^2 \; + \cdots$$

da cui, sommando la serie geometrica, si ottiene:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \; e^{-\beta \, V(x)} = \frac{L}{1 - e^{-\beta \, V_0}} \; .$$

Inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p \; e^{-\beta [a\,|p|]} = 2 \; \int_0^{+\infty} \mathrm{d}p \; e^{-\beta [a\,p]} = \frac{2}{\beta \, a} \; .$$

$$\sum_{\sigma = \pm 1} e^{-\beta [(\sigma+1)(V_0/2)]} = 1 + e^{-\beta \, V_0} \; .$$

Infine

$$z = \frac{1}{h} \; \left(\frac{2}{\beta \, a} \right) \; \left(\frac{L}{1 - e^{-\beta \, V_0}} \right) \; \left(1 + e^{-\beta \, V_0} \right) = \left(\frac{2 \, L}{h \, \beta \, a} \right) \; \left(\frac{e^{\beta \, (V_0/2)} + e^{-\beta \, (V_0/2)}}{e^{\beta \, (V_0/2)} - e^{-\beta \, (V_0/2)}} \right)$$

ovvero

$$z = \left(\frac{2 \, L}{h \, \beta \, a} \right) \; \left(\frac{1}{\tanh(\beta \, V_0/2)} \right) \; .$$

Derivando si ottiene

$$\frac{U}{N} = kT + \frac{V_0/2}{\sinh(V_0/2kT) \cosh(V_0/2kT)} \; .$$

$\mathbf{A}_2$) La probabilità che una data particella si trovi nell' intervallo $[L < x < 2\,L]$ è:

$$P([L, 2\,L]) = \frac{\int_L^{2L} \mathrm{d}x \; e^{-\beta\, V(x)}}{\int_0^\infty \mathrm{d}x \; e^{-\beta\, V(x)}} \; .$$

Usando i calcoli fatti sopra si ottiene:

$$P([L, 2\,L]) = e^{-\beta\, V_0} \left(1 - e^{-\beta\, V_0})\right) \; .$$

$\mathbf{A}_3$) Il numero medio di particelle con $\sigma = +1$, $x < L$ e qualunque valore di p è N volte la probabilità che una data particella si trovi nell' intervallo $[0 < x < L]$ con $\sigma = 1$:

$$N_{1,L} = N \left(\frac{e^{-\beta\, V_0}}{1 + e^{-\beta\, V_0}}\right) \left(1 - e^{-\beta\, V_0}\right)$$

$\mathbf{B}_4$) Dato che $\epsilon_F < V_0$, tutte le particelle del sistema hanno energia minore di V_0; quindi nessuna particella può avere $\sigma = +1$ (cui corrisponde una energia almeno pari a V_0) per cui

$$\langle \sigma \rangle = -1 \; .$$

$\mathbf{B}_5$)

$$U(T = 0) = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon \; G(\epsilon) \; \mathrm{d}\epsilon \; ,$$

essendo $G(\epsilon)$ la densità degli stati nella zona di energie $\epsilon < V_0$. In questa zona ci sono solo stati con $\sigma = -1$ e $0 < x < L$; il loro numero totale è

$$\mathcal{N}(\epsilon < V_0) = \frac{2}{h} \sum_\sigma \int_{a|p| + V(x) + (\sigma+1)(V_0/2) \leq \epsilon} \mathrm{d}x \; \mathrm{d}p = \frac{2}{h} \int_0^L \mathrm{d}x \int_{a|p| \leq \epsilon} \mathrm{d}p$$

$$\mathcal{N}(\epsilon < V_0) = \frac{2\,L}{h} \frac{2\,\epsilon}{a} \; ,$$

da cui si ricava

$$G(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{4\,L}{a\,h}$$

e

$$U(T = 0) = \frac{4\,L}{a\,h} \frac{1}{2} \epsilon_F^2 \; .$$

C) Il numero medio di bosoni presenti nel sistema è dato da

$$N = \int_0^\infty \frac{G(\epsilon)}{(1/f)\exp(\beta\,\epsilon) - 1}\,\mathrm{d}\epsilon$$

dove la f è la fugacità e $f < 1$. Interessa l'andamento dell' integrale per $f \to 1$. L' integrale risultante ponendo $f = 1$

$$\int_0^\infty \frac{G(\epsilon)}{\exp(\beta\,\epsilon) - 1}\,\mathrm{d}\epsilon$$

va studiato in prossimità di $\epsilon = 0$, valore per cui il denominatore si annulla. Per $\epsilon \approx 0$ possiamo usare la $G(\epsilon)$ calcolata sopra (dividendo per 2 per tener conto dell'assenza di spin) e sviluppare l' esponenziale al primo ordine, ottenendo che il contributo dato all' integrale da questi valori di energia è di tipo $\int \mathrm{d}\epsilon/\epsilon$, cioè divergente. Concludiamo che il sistema non mostra condensazione.