

I materiali che si presentano sotto forma granulare, dalle sementi alla sabbia, non seguono le leggi che governano i solidi e i liquidi tradizionali. Lo studio dei loro comportamenti imprevedibili ha una notevole rilevanza, anche economica

La forza dei GRANELLI

di Umberto Marini Bettolo,
Andrea Puglisi
e Angelo Vulpiani

IL CROLLO DI SILO è un evento meno infrequente di quanto si possa pensare: ogni anno solo negli Stati Uniti ne esplodono circa un migliaio. Il fenomeno è legato al comportamento dei mezzi granulari: a differenza di quanto accade con i liquidi, la pressione non si scarica in maniera uniforme sulla base e sulle pareti, ma può concentrarsi su un numero ridotto di punti.



Elaborazione di Fabrizio Pasqualetto / AP Photo

Esistono in natura sistemi solo apparentemente semplici e ancora poco compresi, il cui comportamento non è univocamente assimilabile a uno dei tre stati usuali di aggregazione della materia: gassoso, liquido e solido. Questi sono i cosiddetti mezzi granulari, presenti in molti momenti della nostra vita quotidiana, sotto forma di alimenti quali zucchero, cereali, sale, farina o farmaci fabbricati pressando polveri e riducendole in pillole. Altri prodotti industriali vengono lavorati e trasportati in forma granulare: minerali, materiali da costruzione, rottami, detriti e via discorrendo. Dopo l'acqua, i granulari costituiscono la forma più comune di materiali che l'umanità tratta. Citiamo uno tra tanti rilevanti esempi: l'impatto economico dei mezzi granulari solo

nell'industria chimica a metà degli anni novanta era dell'ordine di 100 miliardi di dollari annui, per cui anche un risparmio percentuale modesto nel loro trattamento rappresenterebbe un grosso passo avanti.

Anche in geofisica e in astronomia i sistemi granulari sono onnipresenti: basti pensare ai deserti, alle spiagge, alle distese nevose, ai fondali marini e agli anelli di Saturno o a fenomeni quali le valanghe. Nel passato lo studio di tali materiali è stato appannaggio quasi esclusivo di ingegneri e geologi, forse perché tra i fisici prevaleva un punto di vista riduzionista: dato che quei sistemi sono costituiti da particelle solide di dimensioni varie (di diametro in genere superiore al micrometro), il solo problema ritenuto interessante sembrava quello di capirne gli aspetti microscopici, cioè legati alle proprietà del singolo grano. Di recente, si è invece capito che per comprendere una classe importante di fenomeni naturali che avvengono su scala macroscopica non sono rilevanti i dettagli del comportamento dei singoli elementi, bensì le loro proprietà collettive. L'aspetto interessante è che si possono manifestare fenomeni qualitativamente molto diversi da quelli che caratterizzano i costituenti elementari.

In realtà la rilevanza dei mezzi granulari non sfuggì ad alcuni importanti scienziati del XIX secolo quali Michael Faraday e Osborne Reynolds, i quali scoprirono che uno strato orizzontale uniforme di sabbia fatto vibrare verticalmente a una data frequenza diventa instabile, con la formazione di profili di densità non uniformi e periodici, e spiegarono che per comprimere un sistema granulare bisogna prima espanderlo.

Clessidre e silo

Un esempio, tratto dalla vita comune, in cui i comportamenti atipici dei sistemi granulari hanno un ruolo fondamentale è fornito dal funzionamento della clessidra. La sabbia al suo interno non si comporta come un fluido normale: la pressione sulla strozzatura, e quindi la velocità di efflusso, non decrescono allo svuotarsi della parte superiore della clessidra, come accadrebbe se questa fosse piena d'acqua. La spiegazione di questa proprietà è dovuta all'olandese K. Janssen (1895).

Questo stesso fenomeno che ha un'applicazione così utile rappresenta anche una sorta di maledizione qualora si voglia immagazzinare una grande quantità di materiale granulare in un silo. Infatti, a causa della disomogeneità del modo in cui le forze si trasmettono in un sistema di grani, all'interno delle pareti si può creare un eccesso di pressione così grande da contribuire a provocare la rottura catastrofica del silo. Ogni anno, negli Stati Uniti ne scoppiano almeno 1000: il problema quindi è anche economico.

È importante sottolineare il fatto che queste grandi fluttuazioni della pressione sono completamente assenti in un recipiente contenente un liquido «normale» come l'acqua. Nello studio dei sistemi granulari il livello appropriato di descrizione è quello mesoscopico: cioè si ignora deliberatamente la struttura interna dei grani che compongono il sistema e che costituiscono i «mattoni elementari» del nostro problema.

Questa assunzione di non tenere conto dei fenomeni a scale di energia e di lunghezza inferiori a quella dei mattoni significa che possiamo trascurare i dettagli dei meccanismi attraverso i quali l'energia meccanica viene convertita in calore. Le particelle granulari interagiscono tra loro con forze che non conservano l'energia, e quindi - se ignoriamo i moti microscopici - si trovano in uno stato di quiete: i grani rimangono in movimento solo se il sistema viene agitato continuamente. Appare quindi immediata la differenza con un sistema costituito da molecole, dove l'energia ceduta al sistema viene immagazzinata sotto forma di energia di agitazione termica delle particelle. Una prima osservazione è che i sistemi granulari praticamente non raggiungono uno stato di equilibrio termico. Ciò a causa delle forze dissipative; l'energia tipica delle fluttuazioni termiche a temperatura ambiente è di molti ordini di grandezza minore dell'energia potenziale tipica di un grano; quindi per tutti gli scopi pratici essi possono essere considerati sistemi a temperatura nulla.

In un mezzo granulare, la tipica scala di energia è mgd (dove m indica la massa del grano, d il suo diametro e g l'accelerazione di gravità): a temperatura ambiente questa energia è almeno 10^{12} volte maggiore dell'energia «termica» $k_B T$ (dove k_B è la costante di Boltzmann e T la temperatura). Pertanto, a meno di perturbarlo dall'esterno iniettando energia in modo continuo, un sistema granulare non «esplora» lo spazio delle fasi, che sarebbe disponibile in assenza di dissipazione. Al contrario, esso rimane intrappolato facilmente in un qualche stato metastabile e le sue proprietà mostrano una forte dipendenza dalla sua storia passata e un comportamento simile a quello osservato nei materiali vetrosi.

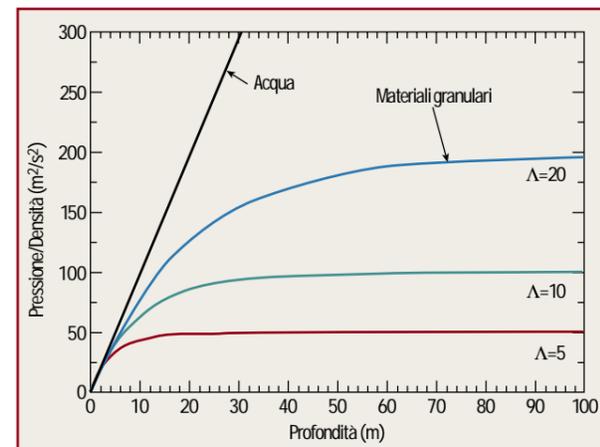
È a causa della presenza delle forze di attrito che un granulare «solidifica», cioè entra in uno stato di quiete che permane a meno che non si inietti energia, per esempio scuotendolo. Se tale perturbazione è forte il sistema si comporta come un fluido.

Vedremo in seguito come la somiglianza con un solido e un fluido usuali sia tuttavia debole. Consideriamo il mucchietto che si ottiene versando del riso crudo sulla superficie di un tavolo. I chicchi rimangono fermi anche se la forza di gravità produce uno sforzo di taglio sulla superficie del mucchio. Questo è il tipico comportamento di un solido. Tuttavia, guardando un po' più in dettaglio, ciò che accade è molto diverso da quanto avviene con un materiale solido, per esempio un pezzo di metallo. Infatti, una forza di compressione applicata dall'alto sul mucchio di riso non viene trasmessa uniformemente verso il basso, ma forma un reticolo spaziale molto complesso di catene di forze. E proprio l'esistenza di queste catene è all'origine della legge di Janssen nei silo: a differenza di un fluido usuale la pressione non aumenta linearmente con la profondità.

Questo comportamento è sostanzialmente dovuto alla formazione di archi che formano volte le quali, appoggiandosi alle pareti laterali, sostengono i grani soprastanti e non ne scaricano il peso sul materiale sottostante. La formazione di tali archi è un fenomeno estremamente sensibile all'arrangiamento microscopico dei grani che formano l'ammasso: questo implica che si possono avere variazioni di pressione molto grandi con effetti anche catastrofici.

IN SINTESI

- I mezzi granulari sono costituiti da particelle solide le cui dimensioni sono comprese tra alcuni micrometri (polveri) e alcuni centimetri (ghiaia e granaglie) e le cui interazioni sono fortemente anelastiche. Le loro proprietà macroscopiche sono in genere molto diverse da quelle degli usuali liquidi o solidi.
- Per i sistemi granulari non valgono la termodinamica e l'idrodinamica che invece si applicano alle usuali forme di aggregazione della materia (liquidi, solidi e gas). Le fluttuazioni non sono trascurabili e possono avere effetti catastrofici, come nel caso della rottura del silo.
- I sistemi granulari hanno comportamenti simili a quelli di sistemi disordinati e vetrosi, per esempio il rilassamento lento verso l'equilibrio e una dipendenza dalla storia passata.
- Nei fluidi granulari la distribuzione di probabilità delle velocità si discosta dall'usuale gaussiana e le disomogeneità in densità possono essere grandi.



IN UN LIQUIDO «NORMALE» (come l'acqua) la pressione cresce linearmente con la profondità (legge di Stevino), mentre in un mezzo granulare aumenta fino a una certa profondità per poi saturare (legge di Janssen). Nel grafico, compare in ordinata il rapporto pressione/densità del liquido, in modo da poter confrontare liquidi diversi. Il valore di saturazione cresce con il parametro Λ , proporzionale al raggio del silo e dipendente dalle caratteristiche microscopiche del materiale.

Archi e zone d'ombra

L'invenzione dell'arco, da molti attribuita agli architetti romani, ha rappresentato una svolta arrivata dopo molti secoli di evoluzione delle tecniche architettoniche. Eppure in un contenitore pieno di grani si possono formare spontaneamente veri e propri archi, come risultato della disposizione casuale dei grani. Questo può succedere, in particolare, durante il riempimento di un silo (con granaglie o altri tipi di materiali). La presenza di questi archi influenza la distribuzione delle forze all'interno del silo. Il peso della colonna di materiale non si scarica più uniformemente, come nel caso di un liquido standard, quale l'acqua. Al contrario, questi archi tendono a scaricare frazioni molto grandi del peso totale su aree molto ristrette, lasciando praticamente senza pressione le zone sottostanti, dette «zone d'ombra». La formazione di archi può interrompere, per esempio, il flusso di sabbia nella clessidra.

Il fenomeno dell'*arching* è una delle cause delle grandi fluttuazioni delle forze che agiscono all'interno di un granulare, come avviene nei mucchi di riso (o di sabbia). Si tratta inoltre di uno dei meccanismi che spiegano la legge di Janssen: superata una certa altezza

della colonna granulare, la pressione alla base non cresce più poiché la pressione in eccesso viene scaricata lateralmente. Janssen diede una spiegazione fenomenologica di questo comportamento: egli assunse, senza però fornire una spiegazione completa del meccanismo, che la pressione del granulare, p_r , sulle pareti laterali del silo fosse proporzionale alla pressione verticale, p_v , cioè $p_r = K p_v$. A partire da questa ipotesi è facile scrivere la condizione di equilibrio per una porzione cilindrica di materiale di raggio R e spessore dh risultante dalla competizione tra la forza peso $\pi R^2 dh \rho g$ diretta verso il basso, e la forza di attrito (con coefficiente μ) sulle pareti $2\pi R dh \mu K p_v$ e la pressione verticale $\pi R^2 dp_v$ dirette in senso opposto: $\pi R^2 dh \rho g = 2\pi R dh \mu K p_v + \pi R^2 dp_v$.

Risolviendo tale equazione si trova che la pressione verticale in funzione dell'altezza $p_v(h)$ varia come mostrato nella pagina a fronte: la pressione oltre una certa altezza $\Lambda = R/2\mu K$ satura e non dipende più dall'altezza. Si noti come tale comportamento sia completamente diverso da quello predetto dalla legge di Stevino per un liquido come l'acqua: $p_v(h) = \rho gh$.



LA FORMAZIONE SPONTANEA di archi può provocare l'interruzione del flusso di sabbia nelle clessidre.

Fluidi granulari

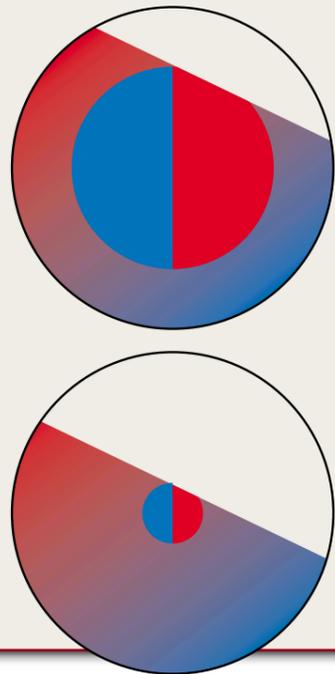
Tre importanti discipline della fisica nate nel XIX secolo - la termodinamica, l'idrodinamica e la fisica statistica - hanno permesso di studiare sistemi costituiti da un numero di elementi così grande da rendere impossibile ogni approccio basato sull'utilizzo delle leggi della meccanica. La termodinamica e l'idrodinamica identificano un piccolo numero di variabili e stabiliscono delle relazioni tra queste; si ha così una descrizione completa delle proprietà macroscopiche dei sistemi in esame. Queste teorie sono state applicate con successo ai fluidi usuali (gas e liquidi) la cui densità è pressoché uniforme.

Nei sistemi granulari, sia nella fase solida che in quella fluida, quantità globali (quali la pressione) che coinvolgono tutti i grani possono avere grandi fluttuazioni e le differenze con un gas, liquido o solido composto di atomi sono enormi. È quindi fuorviante cercare di stabilire strette analogie con la descrizione statistica di un sistema microscopico costituito da molecole. Per esempio, nei sistemi composti da molti elementi microscopici la temperatura ha un ruolo molto importante e regola gli scambi di energia tra le molecole; inoltre essa è anche proporzionale alla velocità quadratica media delle molecole. In un sistema granulare, per contro, la temperatura non sembra regolare gli scambi di energia. Nelle situazioni «normali» il valore delle quantità misurate è praticamente costante, ed è vicino al valor medio, con



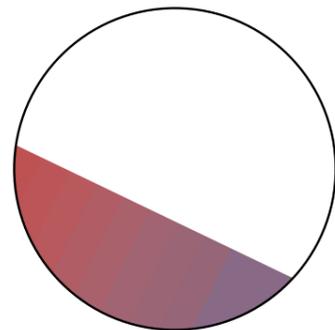
Digital Vision

Mescolamento a valanga

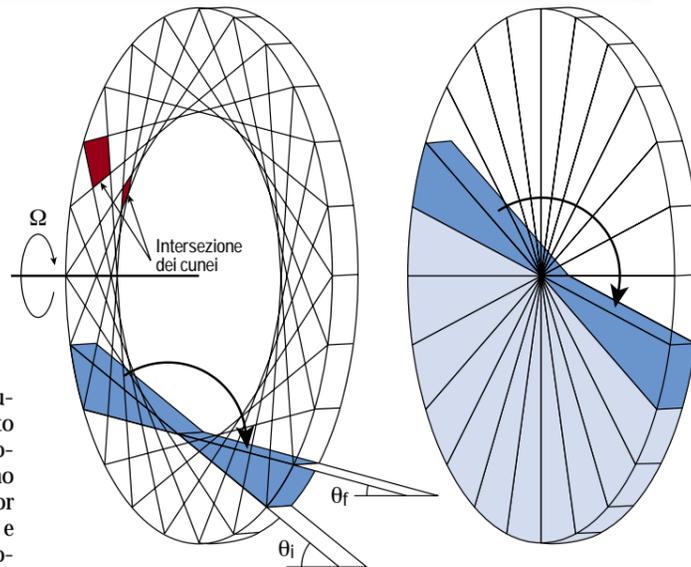


A differenza di quanto accade nei fluidi, non è facile mescolare due diversi materiali granulari. A volte si osservano addirittura comportamenti controintuitivi: agitando una miscela granulare inizialmente omogenea, per esempio durante il trasporto, le varie componenti si possono separare, con esiti spesso indesiderati. Un esempio che illustra il fenomeno è mostrato da un esperimento nel quale un cilindro disposto orizzontalmente e che può ruotare intorno al suo asse viene riempito parzialmente da materiale granulare. I grani che all'inizio si trovano nella metà sinistra del cilindro sono colorati in rosso e quelli nella metà destra in blu. Ruotando il cilindro i grani si mescolano. Ciò che è sorprendente è che, variando la quantità di materiale all'interno del cilindro, si ottengono diversi gradi di mescolamento: in un cilindro molto pieno gran parte del materiale al centro del cilindro (ossia in prossimità dell'asse di rotazione) resta ben separata, mentre nelle regioni periferiche si ha un mescolamento, ma solo parziale. Riducendo il livello di riempimento, la regione non mescolata tende a ridursi e la miscela diviene più omogenea.

È possibile spiegare questo comportamento con un argomento geometrico molto semplice: il materiale all'interno del cilindro, a causa della rotazione, si inclina e raggiunge un angolo critico θ_i oltre il quale l'attrito tra i grani non è più sufficiente a sostenere l'inclinazione e una piccola valanga fa scivolare i grani, riducendo l'angolo da θ_i a θ_f : il materiale che si trova nel cuneo in alto scivola (mescolandosi) nel cuneo in basso. Il grado di mescolamento finale (dovuto a molte di queste valanghe) dipende quindi dalla quantità di intersezione tra i vari cunei, come mostrato in figura.



IL MESCOLAMENTO DI MEZZI GRANULARI a diversi livelli di riempimento in un cilindro rotante dopo due giri completi del cilindro. A sinistra sono mostrati i risultati di un modello matematico simulato al computer, in ottimo accordo con l'esperimento reale.



piccole variazioni. Così la pressione è prodotta dal grande numero di collisioni molecolari su una superficie e fluttua tanto meno quanto più sono gli eventi. Questo è un tipico caso di proprietà «automediate»: gli effetti casuali individuali si sommano per dare un risultato quasi certo. Le deviazioni rispetto al valor medio sono in genere descrivibili dalla distribuzione gaussiana e rientrano in un quadro teorico interpretabile nell'ambito del teorema del limite centrale. Tuttavia questa non è la regola generale e i sistemi granulari forniscono vari contro-esempi e comportamenti inusuali che richiedono lo sviluppo di nuovi metodi di indagine. Le fluttuazioni della pressione sulle pareti di un silo e la distribuzione di velocità in un gas granulare sono fenomeni di questo tipo.

Esistono leggi statistiche che governano il comportamento dinamico dei granulari? In che cosa differiscono dalle usuali leggi della cinetica dei gas e dall'idrodinamica? Rispondere a queste domande costituisce il primo passo per la determinazione di equazioni macroscopiche che descrivano il moto di un fluido macroscopico in modo analogo all'idrodinamica dei fluidi «comuni», come l'acqua. Un importante fenomeno nel quale il comportamento di un sistema granulare è completamente diverso da quello tipico nei fluidi è il mescolamento. Mentre me-

scolare fluidi è facile (con conseguenze spesso negative, come nel caso di disastri ecologici), il mescolamento dei granulari è problematico e richiede accorgimenti particolari. Un esempio rilevante di fluido granulare è costituito dalla sabbia (e dai detriti in genere) in sospensione nell'acqua in movimento. L'insieme di sabbia e acqua si comporta in modo molto complesso e ancora non del tutto ben compreso. La comprensione di tale sistema sarebbe certamente molto utile: si pensi solo alla possibilità di prevenire in modo efficace l'insabbiamento di porti e foci di fiumi.

Forse meno importante dal punto di vista applicativo ma più facile da studiare è il caso dei gas granulari secchi, che si hanno quando lo spazio tra le particelle è vuoto. Abbiamo visto dai pochi casi trattati come i mezzi granulari siano caratterizzati da

Un gas fatto di palline

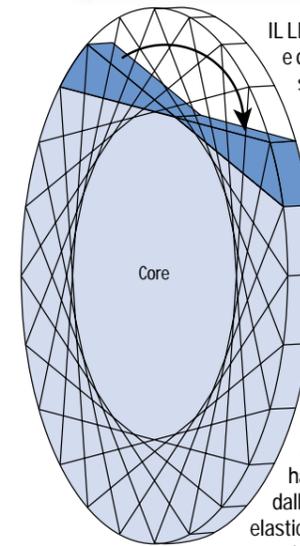
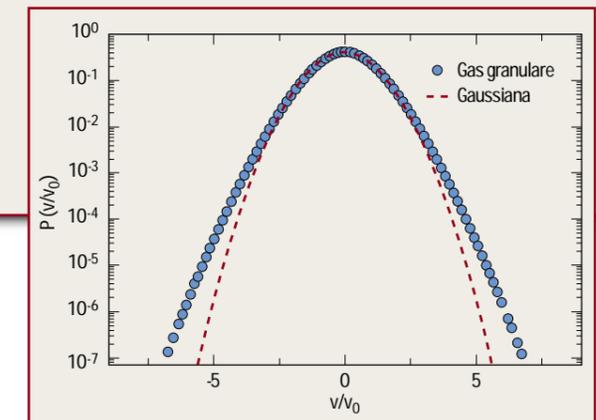
Un gas granulare si può ottenere sottoponendo un insieme di particelle anelastiche a un flusso costante di energia che agisce su di esse in modo aleatorio. Per visualizzare un tale sistema possiamo pensare al getto d'aria di un asciugacapelli che passi attraverso uno scolapasta contenente sferette di polistirolo. Osserveremo un'agitazione casuale delle palline, simile a quella dovuta al moto browniano di particelle colloidali in una soluzione acquosa. D'altra parte, l'anelasticità degli urti tra le palline di polistirolo implica una notevole differenza di comportamento. Possiamo caratterizzare il sistema introducendo, in analogia con i gas molecolari, una «temperatura granulare» proporzionale all'energia cinetica media delle particelle, che tuttavia non possiede alcune delle proprietà tipiche della temperatura, nel senso usuale del termine. Per esempio, una miscela rarefatta costituita da due tipi diversi di grani risulta avere due temperature diverse, una per ciascuna componente, a differenza di quanto accade in una miscela usuale, nella quale i due diversi tipi di molecole hanno la stessa temperatura.

Ma ritorniamo al caso con un solo tipo di granulare con forte anelasticità (ossia alle palline di polistirolo nello scolapasta

sotto il getto d'aria dell'asciugacapelli). Possiamo notare alcuni comportamenti molto interessanti, e decisamente diversi da quanto accade in un comune gas:

1) L'istogramma delle velocità delle particelle devia dalla distribuzione di Maxwell, che rappresenta una legge universale per i moti molecolari: ci sono molte più particelle con velocità grandi rispetto alla velocità (quadratica) media.

2) La densità del sistema può divenire non uniforme e si osservano agglomerati (*cluster*) contenenti molte particelle, la cui geometria può essere frattale, e spazi quasi vuoti. La ragione di questo fenomeno va ricercata di nuovo nell'anelasticità: le palle, dopo l'urto, tornano indietro con energia minore, e questo può essere visto come una sorta di attrazione effettiva tra particelle.



IL LIVELLO DI RIEMPIMENTO NEL CILINDRO, e quindi l'efficacia del mescolamento, sono influenzati dall'angolo critico θ_i e dall'angolo di riposo θ_f tipici del materiale. Quando il livello è inferiore alla metà (*all'estrema sinistra*), il materiale si mescola grazie all'intersezione dei «cunei» che rappresentano la parte che scivola durante la «valanga». Quando il livello è superiore alla metà, parte del materiale non si mescola perché i «cunei» non si intersecano (*qui a sinistra*). La distribuzione di probabilità della velocità dei grani di un gas granulare con interazioni fortemente anelastiche (*in blu a destra*) ha un andamento a campana diverso dalla curva gaussiana, tipica di un gas ideale elastico (*in rosso*). Per comodità, le velocità sono riscalate con la velocità quadratica media.

comportamenti molto diversi da quelli della materia ordinaria e come le loro proprietà varino molto a seconda delle condizioni in cui vengono preparati e mantenuti in movimento. Una serie di risposte ai problemi posti è stata ottenuta, ma rimangono ancora aperte molte questioni, come per esempio se una descrizione idrodinamica del moto di un granulare sia corretta, o se sia possibile una semplice descrizione della compressione di un granulare in termini di equazioni differenziali, che stabiliscono relazioni di tipo locale sia nel tempo sia nello spazio tra le osservabili fisiche. La recente attività di ricerca sui meccanismi fondamentali che determinano il comportamento macroscopico dei granulari porterà non solo a un progresso tecnologico, ma anche a una comprensione migliore degli aspetti microscopici dei sistemi fuori dall'equilibrio termodinamico.

GLI AUTORI

UMBERTO MARINI BETTOLO è professore associato di struttura della materia presso l'Università di Camerino e membro dell'Istituto nazionale di fisica della materia (INFM); si occupa di meccanica statistica e di materia soffice. ANDREA PUGLISI ha conseguito il dottorato in fisica (PhD) nel 2001. È borsista INFM del Centro Statistical Mechanics and Complexity presso l'Università «La Sapienza» di Roma e si occupa di meccanica statistica. ANGELO VULPIANI è professore ordinario di fisica teorica presso l'Università «La Sapienza» di Roma e membro dell'INFM si occupa di meccanica statistica, sistemi dinamici e turbolenza.

BIBLIOGRAFIA

JAEGER H. M., NAGEL S. R., e BEHRINGER R. P., *Granular Solids, Liquids and Gases*, in «Review of Modern Physics», 68, pp. 1259-1273, 1996.
DE GENNES P.G., *Reflections on the Mechanics of Granular Matter*, in «Physica A», 261, pp. 267-293, 1998.
PUGLISI A., LORETO V., MARINI BETTOLO MARCONI U., PETRI A., e VULPIANI A., *Clustering and Non-Gaussian Behavior in Granular Matter*, in «Physical Review Letters», 81, pp. 3848-3851, 1998.
DURAN J., *Sands, Powders, and Grains*, Springer Verlag, Berlino, 2000.
Per ulteriori informazioni: <http://www.phy.duke.edu/~bob/>