

- Osservazione

Le equazioni differenziali (B-1) possono essere risolte cercando la soluzione come una serie di potenze

ES 1 $\dot{X} = ax$ (1)

cerchiamo la soluzione nella forma

$$X(t) = C_0 + C_1 t + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$$

$$\dot{X} = C_1 + 2C_2 t + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) C_{n+1} t^n$$

inserendo nella (1) abbiamo

$$nC_n = a C_{n-1} \rightarrow C_n = \frac{a^n}{n!} C_0$$

ovviamente $C_0 = X(0) \rightarrow$

$$X(t) = C_0 \sum_n \frac{a^n}{n!} t^n = X(0) e^{at}$$

ES 2 $\ddot{X} = -\omega^2 X$ (2)

$$X(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \dots$$

$$\dot{X} = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + \dots$$

$$\ddot{X} = 2C_2 + 3 \cdot 2 C_3 t + 4 \cdot 3 C_4 t^2 + \dots$$

inserendo nella (2) abbiamo

$$C_n = -\frac{\omega^2 C_{n-2}}{n(n-1)}$$

Se $C_0 = 0 \rightarrow C_{2n} = 0$

$$C_{2n+1} = (-1)^n \frac{\omega^{2n+1}}{(2n+1)!} C_1 \rightarrow X(t) = C_1 \sin \omega t$$

Se $C_0 \neq 0$ $C_1 = 0 \rightarrow C_{2n+1} = 0$

$$C_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} C_0 \rightarrow X(t) = C_0 \cos \omega t$$

Modi normali di una
membrana circolare

13-2

L'equazione è la solita

$$\partial_{tt}^2 U = c^2 \Delta U \quad (3)$$

il triangolo in coordinate polari è

$$\Delta U = \frac{\partial^2}{\partial r^2} U + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} U + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U \quad (4)$$

cerchiamo la soluzione nella forma

$$U(r, \theta, t) = \phi(r, \theta) T(t) \quad (5)$$

inserendo nella (4) $\rightarrow$

$$\frac{1}{\phi} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2 \quad (6)$$

da cui

$$T(t) = A \cos(c\lambda t) + B \sin(c\lambda t) -$$

Scriviamo ϕ nella forma

$$\phi(r, \theta) = R(r) F(\theta) \quad (7)$$

Inserendo nella (6) si ha

$$-\frac{R'' + \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R}{\frac{1}{r^2} R} = \frac{F''}{F} = -\nu^2 \quad (8)$$

la soluzione per la F è facile B-3

$$F = a \cos(\nu \theta) + b \sin(\nu \theta)$$

perché $F(\theta)$ deve essere periodico in $(0, 2\pi)$ si ha

$$\nu = n = 0, 1, 2, \dots$$

la parte difficile è l'equazione per la R :

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - n^2) R = 0 \quad (9)$$

Questa è l'eq. di Bessel

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0 \quad (10)$$

ove $R(r) = y(x)$ $x = \lambda r$ $n \rightarrow p$.

facendo il cambio di variabile

$$y = x^p z \quad \text{si ha}$$

$$z'' + \frac{2p+1}{x} z' + z = 0 \quad (11)$$

Cerchiamo la soluzione per $p=0$

$$z = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$z' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

$$z'' = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + \dots$$

in accordo con (11)

si ha

(B-4)

$$\frac{2p+1}{x} C_1 + (2C_2 + (2p+1)2C_2 + C_0) +$$

$$+ (3 \cdot 2C_3 + (2p+1)3C_3 + C_1)x + \dots = 0$$

quindi i coeff. di $\frac{1}{x}$, x^0 , x , x^1 , ...
devono essere nulli $\rightarrow$

$$C_1 = 0 \rightarrow C_{2m+1} = 0$$

$$C_{m+2} = - \frac{C_m}{(m+2)(m+2p+2)} \quad m=0,1,2,\dots$$

$$C_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \quad \text{scelta arbitraria}$$

(è solo una costante
multiplicativa)

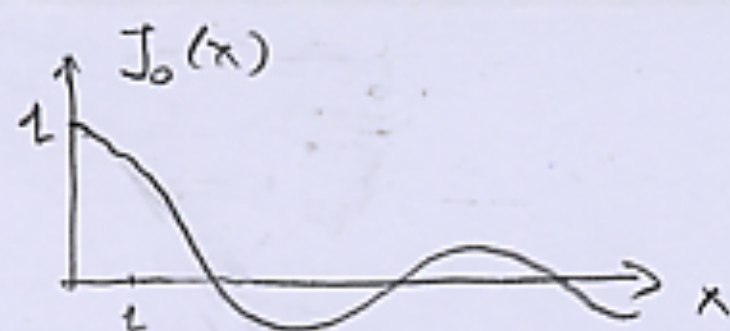
$$C_{2m} = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1) \Gamma(p+m+1) 2^{p+2m}}$$

la soluzione è chiamata funzione
di Bessel $J_p(x)$

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1) \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

Per $p=0$

$$J_0(x) = \sum_m (-1)^m \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$



Abbiamo quindi

$$R(r) = J_n(\lambda r)$$

Dobbiamo ora selezionare i λ "giusti" che sono dati dalle condizioni al bordo: se l è il raggio della membrana abbiamo $R(l) = 0$ quindi

$$J_n(\lambda l) = 0 \quad \Rightarrow$$

i λ consentiti sono determinati da

$$\lambda l = \mu_{n,j} \quad j = 1, 2, \dots$$

ovvero $\mu_{n,1}, \mu_{n,2}, \dots$ sono il primo zero, il secondo zero, ... di $J_n(x)$
 $\Rightarrow$ i λ "buoni" sono

$$\lambda_{n,j} = \frac{\mu_{n,j}}{l}$$

Per R arbitrario

(B-6)

$$R_{n,j} = J_n \left(\frac{\mu_{nj}}{e} r \right) \quad \begin{array}{l} n=0,1,\dots \\ j=1,2,\dots \end{array}$$

In conclusione

$$v(r, \theta, t) = \sum_{n,j} J_n \left(\frac{\mu_{nj}}{e} r \right) \cdot \sin n\theta \cdot$$

$$\cdot [A_{nj} \cos(c \lambda_{nj} t) + B_{nj} \sin(c \lambda_{nj} t)]$$

ove A_{nj} e B_{nj} dipendono dalle condizioni iniziali -

Purtroppo gli zeri di $J_n(x)$ non sono determinabili in modo esatto.

Per approfondire

G.P. Tolstov

Fourier Series (Dover)

Sez. p.1, p.2, p.11, 9.18, 9.19