Corso di Meccanica Statistica, A.A. 2014-2015
Compito del 7 luglio 2015

Un solo libro, niente appunti, quaderni, ecc.
Scrivere in stampatello sul primo foglio in alto a sinistra
COGNOME e N. (iniziale del nome) // esempio: BOLTZMANN L.

I – Un gas di N particelle identiche non interagenti è contenuto in una sfera di raggio R, centrata nell' origine. L' hamiltoniana di singola particella è:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \alpha\,(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \qquad (\alpha > 0)\ .$$

Assumendo che il gas sia in equilibrio alla temperatura T e che si possa applicare la statistica di Boltzmann, si calcoli, in funzione di T,
a) la pressione sul bordo;
b) la densità di probabilità dell' energia per una particella.

II – N fermioni identici non interagenti, di massa m e spin 1/2, sono vincolati a muoversi in un piano, in una regione di area A; l' Hamiltoniana di singola particella è:

$$H = c\,\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + m^2c^2}$$

dove c è la velocità della luce. Supponendo che il sistema si trovi allo zero assoluto, calcolare:
c) l' energia di Fermi, ϵ_F;
d) l' energia totale U_0.

SOLUZIONE

I a) La relazione termodinamica

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V}\bigg|_{T,N}$$

nel caso di un gas perfetto si scrive

$$P = \frac{\partial}{\partial V} NkT \ln(z\, e/N)\Big|_{T,N}$$

e in questo caso si ha:

$$z = \frac{1}{h^3} \int \mathrm{d}\mathbf{x}\, \mathrm{d}\mathbf{p}\, e^{-\beta H(\mathbf{x},\mathbf{p})} = \frac{1}{\lambda^3} \left(\int_{r<R} \mathrm{d}\mathbf{x}\; e^{-\beta\, \alpha\, r^3} \right) ,$$

avendo posto $r = |\mathbf{x}|$ e avendo introdotto la lunghezza d'onda termica

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}} \; .$$

Passando a coordinate sferiche si ottiene

$$z = \frac{4\,\pi}{\lambda^3} \int_0^R r^2 \mathrm{d}r\; e^{-\beta\,\alpha\, r^3} = \frac{4\,\pi}{3\,\beta\,\alpha\,\lambda^3} \left(1 - e^{-\beta\,\alpha\, R^3}\right) \; .$$

Tenendo conto del fatto che in questo sistema

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e quindi} \quad \mathrm{d}V = 4\pi R^2 \mathrm{d}R$$

risulta

$$P = \frac{NkT}{4\pi R^2} \frac{\partial}{\partial R} \ln(ze/N) = \frac{NkT}{4\pi R^2} \frac{\partial}{\partial R} \ln \left(1 - e^{-\beta\,\alpha\, R^3}\right)$$

e alla fine

$$P = \frac{N\, 3\,\alpha}{4\,\pi} \; \frac{e^{-\beta\,\alpha\, R^3}}{1 - e^{-\beta\,\alpha\, R^3}} \; .$$

Si noti che quest'ultima espressione è anche interpretabile come

$$P = kT\, n\Big(|\mathbf{x}| = R\Big)$$

dove $n(|\mathbf{x}| = R)$ è la densità di particelle in un punto qualunque della superficie della sfera.

I b) Dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann

$$\rho(x,p) = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{x},\mathbf{p})}}{\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{p}' e^{-\beta H(\mathbf{x}',\mathbf{p}')}} = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{x},\mathbf{p})}}{h^3\ z} ,$$

integrando sugli stati con energia ϵ, si ottiene

$$p(\epsilon) = \frac{\omega(\epsilon)\ e^{-\beta\epsilon}}{h^3\ z} ,$$

dove

$$\omega(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}\Sigma(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \int\limits_{H\leq\epsilon} \mathrm{d}\mathbf{x}\ \mathrm{d}\mathbf{p} .$$

Nel caso che sia $\epsilon < \alpha R^3$ si ha:

$$\Sigma(\epsilon) = \int\limits_{p^2/2m+\alpha r^3\leq\epsilon} \mathrm{d}\mathbf{x}\ \mathrm{d}\mathbf{p} = 4\pi \int_0^{(\epsilon/\alpha)^{1/3}} r^2\,\mathrm{d}r \int\limits_{p^2\leq 2m(\epsilon-\alpha r^3)} \mathrm{d}\mathbf{p} ;$$

$$\Sigma(\epsilon) = 4\pi \int_0^{(\epsilon/\alpha)^{1/3}} r^2\,\mathrm{d}r\ \frac{4}{3}\ \pi \left(2m(\epsilon-\alpha r^3)\right)^{3/2}$$

che, con il cambiamento di variabile $u = \epsilon - \alpha r^3$, dà

$$\Sigma(\epsilon) = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 (2m)^{3/2}\ \frac{2}{5\alpha}\ \epsilon^{5/2} .$$

Se invece $\epsilon > \alpha R^3$ si ha:

$$\Sigma(\epsilon) = 4\pi \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r \int\limits_{p^2\leq 2m(\epsilon-\alpha r^3)} \mathrm{d}\mathbf{p} ;$$

da cui si ottiene

$$\Sigma(\epsilon) = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 (2m)^{3/2}\ \frac{2}{5\alpha} \left[\epsilon^{5/2} - (\epsilon-\alpha R^3)^{5/2}\right] .$$

Derivando le espressioni ottenute per Σ si ricava

$$\omega(\epsilon) = \Big(\frac{4}{3}\pi\Big)^2 \frac{(2m)^{3/2}}{\alpha} \Big[\epsilon^{3/2} - \theta(\epsilon - \alpha R^3)\ (\epsilon - \alpha R^3)^{3/2}\Big] \ ,$$

in cui la $\theta(\epsilon - \alpha R^3)$ tiene conto del pezzo da sottrarre se $\epsilon > \alpha R^3$. Il risultato finale si scrive

$$p(\epsilon) = \frac{4\ \beta^{5/2}}{3\ \pi^{1/2}} \frac{\Big[\epsilon^{3/2} - \theta(\epsilon - \alpha R^3)\ (\epsilon - \alpha R^3)^{3/2}\Big]}{1 - e^{-\beta \alpha R^3}} e^{-\beta\epsilon}$$

II c) Il numero di stati di singola particella con energie fino a ϵ ($\geq mc^2$) è dato da:

$$\mathcal{N}(\epsilon) = 2 \int_{[c(\mathbf{p}^2 + (mc)^2)^{1/2} \leq \epsilon]} \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{p}}{h^2}$$

ovvero

$$\mathcal{N}(\epsilon) = 2\ \frac{A}{h^2} \int_{[\mathbf{p}^2 \leq (\epsilon^2/c^2) - (mc)^2]} \mathrm{d}\mathbf{p} = \frac{2\,\pi\,A}{(hc)^2}(\epsilon^2 - m^2\,c^4)\ ;$$

la densità degli stati risulta quindi

$$G(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{4\,\pi\,A}{(hc)^2}\ \epsilon\ .$$

L' energia di Fermi si ricava dalla condizione:

$$\mathcal{N}(\epsilon_F) = \frac{2\,\pi\,A}{(hc)^2}\Big(\epsilon_F^2 - m^2\,c^4\Big) = N$$

ottenendo

$$\epsilon_F = \sqrt{\frac{Nh^2c^2}{2\ \pi\ A} + m^2\ c^4}$$

II d) L' energia del sistema a $T = 0$ si scrive

$$U_0 = \int_{mc^2}^{\epsilon_F} \epsilon\, G(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon\ ,$$

da cui si ottiene

$$U_0 = \frac{4\pi A}{3h^2c^2}\Big(\epsilon_F^3 - (mc^2)^3\Big)\ .$$