

Corso di Meccanica Statistica, A.A. 2013-2014
Compito del 24 febbraio 2014

Un SOLO libro, niente appunti, quaderni, ecc.

Scrivere sul primo foglio in alto a sinistra Nome (solo iniziale) e Cognome in stampatello, ad es. G. VERDI

Un gas perfetto di N particelle identiche di massa m , vincolate a muoversi in un cilindro di altezza L ($0 \leq z \leq L$) e raggio R ($\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$), ha come Hamiltoniana di singola particella:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(x), \quad \text{dove}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= A(x^2 + y^2) \quad \text{se} \quad 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{R}{2}, \\ V(x) &= V_0 = \frac{AR^2}{8} \quad \text{se} \quad \frac{R}{2} < \sqrt{x^2 + y^2} \leq R. \end{aligned} \quad (1)$$

1) Nel caso che valga la statistica di Boltzmann e il sistema sia in equilibrio alla temperatura T , si calcoli:

- a) la pressione sulla parete laterale, in funzione di N e T ;
- b) il numero medio di particelle con $\sqrt{x^2 + y^2} < R/4$ e $z > L/2$.

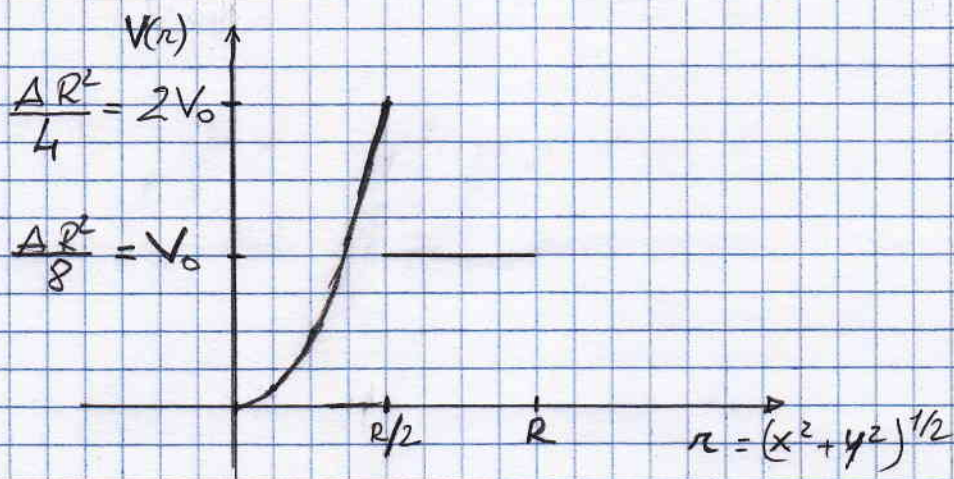
2) Nel caso che le particelle siano fermioni di spin $1/2$ a $T = 0$,

- a) calcolare N_{max} , il massimo numero di particelle che il sistema può contenere in modo che non ci siano particelle con $\sqrt{x^2 + y^2} > R/4$;
- b) l'energia del sistema, U_0 , nel caso in cui sia $\epsilon_F = AR^2/4$.

3) Nel caso che le particelle siano bosoni di spin 0 , discutere l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.

Smith M.S. 24/02/2014

SOLUZIONE



$$1a) P(R) = \frac{KT \int d\vec{x} e^{-\beta V(\vec{x})}}{N e^{-\beta V(R)}} = \frac{NKT e^{-\beta V_0}}{I}$$

$$I = \int_0^L dz \int_0^R 2\pi r dr e^{-\beta V(r)}$$

$$= L\pi \left\{ \int_0^{R/2} 2r dr e^{-\beta A r^2} + \int_{R/2}^R 2r dr e^{-\beta V_0} \right\} \quad (t=r^2)$$

$$= L\pi \left\{ -\frac{1}{\beta A} \left[e^{-\beta A t} \right]_0^{R^2/4} + e^{-\beta V_0} \frac{3}{4} R^2 \right\}$$

$$I = \frac{\pi L}{\beta A} \left(1 - e^{-\beta 2V_0} + 6\beta V_0 e^{-\beta V_0} \right)$$

$$P(R) = \frac{NA/\pi L}{2 \sinh(\beta V_0) + 6\beta V_0}$$

$$1b) \hat{N} = N \hat{\Phi}$$

$$\hat{\Phi} = \frac{\int_{L/2}^L dt \int_0^{R/4} 2\pi r dr e^{-\beta V(r)}}{I}$$

$$= \frac{1}{I} \frac{1}{2} L \pi \int_0^{R^2/16} dt e^{-\beta A t} = \frac{1}{2} \frac{1}{I} \frac{L \pi}{\beta A} \left(1 - e^{-\beta \frac{V_0}{2}} \right)$$

$$\hat{N} = \frac{N}{2} \frac{1 - e^{-\beta V_0/2}}{1 - e^{-2\beta V_0} + 6\beta V_0 e^{-\beta V_0}}$$

2a) Tutte le particelle dei sistemi ammessi devono avere energia minore di $V(R/4) = AR^2/16$. I sistemi consecutivi hanno quindi $E_F < V_0/2$. $N_{\max}$ si ha per $E_F = V_0/2$.

$$N(E < V_0) = \frac{2}{h^3} \int dz dx dy d\vec{p} \quad \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(x,y) \leq E \quad = \frac{2L}{h^3} \int 2\pi r dr d\vec{p} \quad \frac{\vec{p}^2}{2m} + A r^2 \leq E$$

$$= \frac{2L}{h^3} \int_0^{\sqrt{E/A}} 2\pi r dr \int d\vec{p} \quad \vec{p}^2 \leq 2m(E - A r^2)$$

$$= \frac{2\pi L}{h^3} \int_0^{(E/A)} dt \quad \frac{4}{3} \pi [2m(E - At)]^{3/2}$$

$$(u = E - At)$$

$$= (2m)^{3/2} \frac{4}{3} \pi^2 \frac{2L}{h^3} \int_0^E \frac{du}{A} u^{3/2}$$

$$N(E < V_0) = \left[(2m)^{3/2} \frac{8}{3} \pi^2 \frac{L}{h^3 A} \right] \frac{2}{5} E^{5/2} \equiv \frac{2}{5} \frac{\gamma}{A} E^{5/2}$$

$$N_{\max} = N(E_F = \frac{V_0}{2}) = \frac{2}{5} \frac{\gamma}{A} \left(\frac{V_0}{2} \right)^{5/2}$$

2b) Per $E_F = \frac{AR^2}{4} > V_0$ gli stati occupati sono anche

quelli con $R/2 < r < R$, che hanno energie potenziale V_0 .

Posto $V_0 = \int_0^{E_F} G(E) dE$ con $G(E) = \frac{dN(E)}{dE}$

si devono distinguere vari casi

$E \leq V_0$ (caso precedente)

$$N(E) = \gamma \int_0^{\sqrt{E/A}} 2r dr (E - Ar^2)^{3/2} \quad \left(\left(\frac{E}{A} \right)^{1/2} \leq \frac{R}{\sqrt{2}} \right)$$

$V_0 < E \leq 2V_0$ (caso in esame)

$$N(E) = \gamma \int_0^{\sqrt{E/A}} 2r dr (E - Ar^2)^{3/2} + \gamma \int_{R/2}^R 2r dr (E - V_0)^{3/2}$$

$(\sqrt{E/A} \leq R/2)$

$E > 2V_0 = AR^2/4$

$$N(E) = \gamma \int_0^{R/2} 2r dr (E - Ar^2)^{3/2} + \gamma \int_{R/2}^R 2r dr (E - V_0)^{3/2}$$

si ha fu i 3 integrali

$$\int_0^{\sqrt{\epsilon/A}} 2\pi r dr (\epsilon - Ar^2)^{3/2} = \frac{1}{A} \frac{2}{5} \epsilon^{5/2}$$

$$\int_{R/2}^R 2\pi r dr (\epsilon - V_0)^{3/2} = \frac{3}{4} R^2 (\epsilon - V_0)^{3/2} = \frac{6V_0}{A} (\epsilon - V_0)^{3/2}$$

$$\int_0^{R/2} 2\pi r dr (\epsilon - Ar^2)^{3/2} = \frac{1}{A} \int_{\epsilon - AR^2/4}^{\epsilon} du u^{3/2}$$

$$= \frac{1}{A} \frac{2}{5} (\epsilon^{5/2} - (\epsilon - 2V_0)^{5/2})$$

Introducendo la funzione gradino Θ in maniera compatta si può scrivere

$$N(\epsilon) = \frac{2}{5} \frac{V}{A} \epsilon^{5/2} + 6 \frac{V}{A} V_0 (\epsilon - V_0)^{3/2} \Theta(\epsilon - V_0) + \\ - \frac{2}{5} \frac{V}{A} (\epsilon - 2V_0)^{5/2} \Theta(\epsilon - 2V_0) \quad \text{da cui}$$

$$G(\epsilon) = \frac{V}{A} \epsilon^{3/2} + 9 \frac{V}{A} V_0 (\epsilon - V_0)^{1/2} \Theta(\epsilon - V_0) + \\ - \frac{V}{A} (\epsilon - 2V_0)^{3/2} \Theta(\epsilon - 2V_0)$$

si ha quindi, essendo $\epsilon_F = 2V_0$

$$U_0 = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon \left\{ \frac{\gamma}{A} \epsilon^{3/2} + g \frac{\gamma}{A} V_0 (\epsilon - V_0)^{1/2} \theta(\epsilon - V_0) \right\} d\epsilon$$

$$= \frac{\gamma}{A} \left\{ \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{5/2} d\epsilon + g V_0 \int_{V_0}^{\epsilon_F} (\epsilon - V_0)^{1/2} \epsilon d\epsilon \right\}$$

$$= \frac{\gamma}{A} \left\{ \frac{2}{7} \epsilon_F^{7/2} + g V_0 \int_0^{\epsilon_F - V_0} u^{1/2} (u + V_0) du \right\}$$

$$= \frac{\gamma}{A} \left\{ \frac{2}{7} \epsilon_F^{7/2} + g V_0 \left(\frac{2}{5} (\epsilon_F - V_0)^{5/2} + \frac{2}{3} V_0 (\epsilon_F - V_0)^{3/2} \right) \right\}$$

$$U_0 = \frac{\gamma}{A} V_0^{7/2} 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{7} + \frac{3}{5} \right)$$

$$3) \text{ Dato } N = \int_0^{\infty} \frac{G_B(\epsilon) d\epsilon}{\frac{1}{f} e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{1}{2A} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{\frac{1}{f} e^{\beta\epsilon} - 1}$$

$$+ \frac{g \gamma V_0}{2A} \int_{V_0}^{\infty} \frac{(\epsilon - V_0)^{1/2} d\epsilon}{\frac{1}{f} e^{\beta\epsilon} - 1} - \frac{1}{2A} \int_{2V_0}^{\infty} \frac{(\epsilon - 2V_0)^{3/2} d\epsilon}{\frac{1}{f} e^{\beta\epsilon} - 1}$$

essendo $f < 1$ e i 3 integrali avendo

valori finiti per $f = 1$. (per ogni fissato valore di β) si ha condensazione di B.E.

(per la densità degli stati dei bosoni di spin 0)
si ha $G_B(\epsilon) = \frac{1}{2} G(\epsilon)$