Corso di Meccanica Statistica, A.A. 2013-2014
Compito dell' 11 settembre 2014

Un SOLO libro, niente appunti, quaderni, ecc.
Scrivere sul primo foglio in alto a sinistra Nome (solo iniziale) e Cognome in stampatello, ad es. M. ROSSI

Un sistema è costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, che si muovono in un piano, con hamiltoniana di singola particella:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{\alpha}{2}x^2 + V(y)$$

dove α è una costante positiva ed è

$$\begin{array}{lll} V(y) = \infty & \text{se} & y < 0 \\ V(y) = 0 & \text{se} & 0 \leq y < L \\ V(y) = V_0 & \text{se} & L \leq y < 2L \\ V(y) = \infty & \text{se} & y \geq 2L \end{array} \tag{1}$$

1) Assumendo che si possa applicare la statistica classica (statistica di Boltzmann) e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T,
a) si calcoli l'energia media per particella U/N;
b) si calcoli $\hat{N}$, il numero medio di particelle con $y < L$ e $kT < p_x^2/2m + \alpha x^2/2 < 2kT$.

2) Supponendo che le particelle siano fermioni di spin 1/2,
c) calcolare l' energia del sistema a temperatura nulla, $U(T = 0)$, nei due casi: $\epsilon_F = V_0/2$ e $\epsilon_F = 3V_0/2$.

3) Supponendo che le particelle siano bosoni di spin zero,
d) mostrare che esiste la condensazione di Bose-Einstein;
e) scrivere l' equazione che determina la temperatura di condensazione T_c e far vedere che T_c è sempre intermedia tra il caso $V_0 = 0$ e il caso $V_0 = \infty$.

SOLUZIONE

1 − *a*) Per un gas perfetto

$$\frac{U}{N} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln z\ ,$$

dove, in questo caso

$$z = \frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_0^{2L} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\mathbf{p}\ e^{-\beta[\mathbf{p}^2/2m]}\ e^{-\beta[\alpha x^2/2]}\ e^{-\beta[V(y)]}\ ;$$

e si ha:

$$z = \frac{1}{h^2}\ \frac{2\pi m}{\beta}\ \sqrt{\frac{2\pi}{\beta\,\alpha}}\ L\left(1 + e^{-\beta\, V_0}\right)\ .$$

Derivando si ottiene

$$\frac{U}{N} = \frac{3}{2\beta} + V_0\ \frac{e^{-\beta\, V_0}}{1 + e^{-\beta\, V_0}}$$

1 − *b*) La frazione media di particelle che si trovano nella condizione richiesta è:

$$\frac{\hat{N}}{N} = \frac{1}{h^2\ z}\int_0^L \mathrm{d}y\ e^{-\beta\, V(y)}\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_y\ e^{-\beta\, p_y^2/2m} \int\limits_{kT<p_x^2/2m+\alpha x^2/2<2kT} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}p_x e^{-\beta[p_x^2/2m\, +\, \alpha x^2/2]}$$

Usando i calcoli fatti sopra si ottiene:

$$\frac{\hat{N}}{N} = \frac{1}{1 + e^{-\beta\, V_0}}\ \frac{\beta}{2\pi}\ \sqrt{\frac{\alpha}{m}}\ J\ ,$$

dove si è posto

$$J = \int\limits_{1<p_x^2/2mkT+\alpha x^2/2kT<2} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}p_x e^{-[p_x^2/2mkT\, +\, \alpha x^2/2kT]}\ .$$

Introducendo variabili adimensionali

$$u = \frac{p_x}{\sqrt{2mkT}} \quad \text{e} \quad v = x\sqrt{\frac{\alpha}{2kT}}$$

si ricava

$$J = 2kT\sqrt{\frac{m}{\alpha}} \int\limits_{1<u^2+v^2<2} \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v e^{-[u^2\, +\, v^2]}\ ,$$

da cui, passando a coordinate polari nel piano (u, v), si ha

$$J = 2kT\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\int_1^{\sqrt{2}} 2\pi\rho \mathrm{d}\rho e^{-[\rho^2]} = 2\pi kT\sqrt{\frac{m}{\alpha}}(e^{-1} - e^{-2})\ .$$

Alla fine
$$\frac{\hat{N}}{N} = \frac{e^{-1} - e^{-2}}{1 + e^{-\beta\, V_0)}} \; .$$

2 $- c$) Per $T = 0$
$$U(T=0) = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon\; G(\epsilon)\; \mathrm{d}\epsilon \; ,$$
essendo $G(\epsilon)$ la densità degli stati.
Nel caso $\epsilon_F = V_0/2 < V_0$ le particelle del sistema, avendo energia minore di V_0, non possono trovarsi nella regione con $L < y < 2L$ (cui corrisponde una energia almeno pari a V_0). Il numero totale di stati con energie fino a $\epsilon < V_0$ è dato da

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\epsilon < V_0) &= \frac{2}{h^2} \int_0^L \mathrm{d}y \int\limits_{p_x^2/2m + p_y^2/2m + \alpha x^2/2 \le \epsilon} \mathrm{d}x\; \mathrm{d}p_x\; \mathrm{d}p_y \\ &= \frac{2L}{h^2} \int_{-\sqrt{2\epsilon/\alpha}}^{+\sqrt{2\epsilon/\alpha}} \mathrm{d}x \int\limits_{p_x^2/2m + p_y^2/2m \le \epsilon - \alpha x^2/2} \mathrm{d}p_x\; \mathrm{d}p_y \end{aligned} \tag{2}$$

$$\mathcal{N}(\epsilon < V_0) = \frac{2\,L}{h^2}\; 2\int_0^{+\sqrt{2\epsilon/\alpha}} \mathrm{d}x\; \pi 2m(\epsilon - \alpha x^2/2) = \frac{8\pi\, mL}{h^2}\;\; \frac{2}{3}\epsilon^{3/2}\;\; \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$$
da cui si ricava
$$G(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{N}}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{8\pi\, mL}{h^2}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\;\; \epsilon^{1/2}$$
e quindi
$$U(T=0) = \frac{8\pi\, mL}{h^2}\;\; \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\;\; \frac{2}{5}\epsilon_F^{5/2} \; .$$
Nel caso $\epsilon_F = 3V_0/2 > V_0$ le particelle del sistema, potendo avere anche energia maggiore di V_0, possono trovarsi anche nella regione con $L < y < 2L$. Il numero totale di stati con energie fino a ϵ adesso è dato da

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\epsilon) &= \frac{2}{h^2}\, \Big(\int_0^L \mathrm{d}y \int\limits_{p_x^2/2m + p_y^2/2m + \alpha x^2/2 \le \epsilon} \mathrm{d}x\; \mathrm{d}p_x\; \mathrm{d}p_y + \int_L^{2L} \mathrm{d}y \int\limits_{p_x^2/2m + p_y^2/2m + \alpha x^2/2 + V_0 \le \epsilon} \mathrm{d}x\; \mathrm{d}p_x\; \mathrm{d}p_y \Big) \\ &= \mathcal{N}_0(\epsilon) + \mathcal{N}_1(\epsilon) \; . \end{aligned} \tag{3}$$

$\mathcal{N}_0$ è l'integrale già calcolato; per $\mathcal{N}_1$ si ha
$$\mathcal{N}_1 = \frac{2L}{h^2}\; 2\int_0^{+\sqrt{2(\epsilon - V_0)/\alpha}} \mathrm{d}x \int\limits_{p_x^2/2m + p_y^2/2m \le (\epsilon - V_0) - \alpha x^2/2} \mathrm{d}p_x\; \mathrm{d}p_y \; ,$$
da cui si ottiene
$$\mathcal{N}_1 = \frac{8\pi\, mL}{h^2}\;\; \frac{2}{3}(\epsilon - V_0)^{3/2}\;\; \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\;\; \theta(\epsilon - V_0) \; ,$$

dove la funzione gradino θ è introdotta per ricordare che il contributo di $\mathcal{N}_1$ c' è solo per $\epsilon > V_0$.

$$G(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}(\mathcal{N}_0 + \mathcal{N}_1) = \frac{8\pi\, mL}{h^2}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\Big(\epsilon^{1/2} + (\epsilon - V_0)^{1/2}\theta(\epsilon - V_0)\Big)$$

e quindi

$$\begin{aligned} U(T=0) &= \frac{8\pi\, mL}{h^2}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\Big(\int_0^{\epsilon_F} \mathrm{d}\epsilon\ \epsilon^{3/2}\ + \int_{V_0}^{\epsilon_F} \mathrm{d}\epsilon\ \epsilon\,(\epsilon - V_0)^{1/2}\Big) \\ &= \frac{8\pi\, mL}{h^2}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\Big(\frac{2}{5}\epsilon_F^{5/2}\ + \int_0^{\epsilon_F - V_0} \mathrm{d}t\big(t^{3/2} +\ V_0 t^{1/2}\big)\Big)\ , \end{aligned} \tag{4}$$

$$U(T=0) = \frac{8\pi\, mL}{h^2}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\Big(\frac{2}{5}\epsilon_F^{5/2}\ + \frac{2}{5}(\epsilon_F - V_0)^{5/2} + \frac{2}{3}V_0(\epsilon_F - V_0)^{3/2}\Big)\ .$$

3 $- d)$ Il numero medio di bosoni presenti nel sistema è dato da

$$N = \int_0^\infty \frac{G(\epsilon)}{(1/f)\exp(\beta\,\epsilon) - 1}\,\mathrm{d}\epsilon$$

dove la $f < 1$ è la fugacità. Usando la densità degli stati calcolata per i fermioni, dimezzata per l'assenza dello spin, poniamo

$$G(\epsilon) = \frac{4\pi\, mL}{h^2}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\Big(\epsilon^{1/2} + (\epsilon - V_0)^{1/2}\theta(\epsilon - V_0)\Big) \equiv \gamma\Big(\epsilon^{1/2} + (\epsilon - V_0)^{1/2}\theta(\epsilon - V_0)\Big)\ ;$$

si ha quindi

$$N = \gamma\Big(\int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}\ \mathrm{d}\epsilon}{(1/f)\exp(\beta\,\epsilon) - 1} + \int_{V_0}^\infty \frac{\sqrt{\epsilon - V_0}\ \mathrm{d}\epsilon}{(1/f)\exp(\beta\,\epsilon) - 1}\Big)$$

che si può riscrivere

$$N = \gamma\Big(\int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}\ \mathrm{d}\epsilon}{(1/f)\exp(\beta\,\epsilon) - 1} + \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}\ \mathrm{d}t}{(1/f)\exp(\beta\,t + \beta V_0) - 1}\Big)\ .$$

Introducendo una variabile adimensionale u e ponendo

$$\frac{\epsilon}{kT} = u \quad \text{e} \quad \frac{t}{kT} = u$$

si ha infine

$$\begin{aligned} N &= \gamma(kT)^{3/2}\Big(\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}\ \mathrm{d}u}{(1/f)e^u - 1} + \int_0^\infty \frac{\sqrt{u}\ \mathrm{d}u}{(1/f)e^u e^{V_0/kT} - 1}\Big) \\ &\equiv \gamma(kT)^{3/2}\Big(I_{1/2}(f) + I(f, V_0/kT)\Big)\ . \end{aligned} \tag{5}$$

Confrontando le funzioni integrande, si vede facilmente che $I(f, V_0/kT) < I_{1/2}(f)$. Ci interessa l'andamento degli integrali per $f \to 1$. Sappiamo che $I_{1/2}(f = 1)$ è una costante finita e quindi anche $I(f = 1, V_0/kT) + I_{1/2}(f = 1)$ ha valore finito ($< 2I_{1/2}(f = 1)$). Questo significa che al diminuire della temperatura si presenterà la condensazione di Bose-Einstein. La temperatura di condensazione è definita dalla relazione

$$N = \gamma(kT_c)^{3/2}\Big(I_{1/2}(f = 1) + I(f = 1, V_0/kT_c)\Big) .$$

È immediato verificare che $I(f = 1, V_0/kT_c)$ è una funzione decrescente di V_0 e dato che $I(f = 1, V_0/kT_c) = I_{1/2}(f = 1)$ se $V_0 = 0$, $I(f = 1, V_0/kT_c) \to 0$ se $V_0 \to \infty$, T_c sarà intermedia tra i due casi.