

7. Sistemi lineari classici

7.1 Teoria classica delle piccole oscillazioni

I sistemi a molti gradi di libertà possono mostrare un comportamento molto complicato in prossimità di un equilibrio stabile. Tuttavia, questo comportamento può sempre essere considerato come la sovrapposizione di movimenti armonici di gradi di libertà indipendenti, i *modi normali di oscillazione*.

7.1.1 Piccole oscillazioni di un sistema di particelle

Supponiamo di avere un sistema di particelle con r coordinate generalizzate $q = (q_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ descritto da una lagrangiana standard $L = T - V$ con energia cinetica T della forma (1.5) e potenziale V :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q). \quad (1.5)$$

I punti critici di V , cioè punti \bar{q} tali che

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{q=\bar{q}} = 0$$

definiscono le configurazioni di equilibrio del sistema. Supponiamo che l'equilibrio sia stabile, cioè, che \bar{q} sia un minimo (locale) di V .

Approssimiamo il movimento nell'intorno di un punto di equilibrio definendo

$$\delta q = q - \bar{q}$$

ed espandiamo la lagrangiana in una serie di Taylor intorno a $\delta q = 0$. Al primo ordine non banale otteniamo

$$L \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[M_{ij} \delta \dot{q}_i \delta \dot{q}_j - K_{ij} \delta q_i \delta q_j \right]$$

dove

$$M_{ij} = a_{ij}(q_0), \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j}(q_0)$$

e abbiamo abbandonato la costante additiva irrilevante $V(q_0)$, cioè abbiamo regolato lo zero di energia potenziale per essere in q_0 . Abbiamo che $M_{ij} = M_{ji}$ e supponiamo che l'energia potenziale sia sufficientemente liscia in modo che la matrice delle derivate parziali seconde sia simmetrica nel punto critico q_0 , cioè $K_{ij} = K_{ji}$.

Ricordiamo che se q_0 è un punto di equilibrio stabile allora la matrice simmetrica K è positiva definita, cioè può avere solo autovalori positivi.¹ Questo perché un autovalore negativo o nullo corrisponde a spostamenti δq che abbassano o non cambiano l'energia potenziale in un intorno arbitrariamente piccolo del punto di equilibrio, il che contraddice la nostra ipotesi di equilibrio stabile. Viceversa, poiché ogni matrice simmetrica può essere diagonalizzata se gli autovalori sono tutti positivi, allora il punto q_0 è un minimo. In altre parole, q_0 è un punto di equilibrio stabile se e solo se la forma quadratica

$$\sum_{ij} K_{ij} \delta q_i \delta q_j$$

è definita positiva. Fisicamente, ciò significa che qualsiasi spostamento δq dall'equilibrio aumenterà l'energia potenziale. Allo stesso modo, la positività dell'energia cinetica implica che in qualsiasi applicazione fisica la matrice simmetrica M_{ij} deve essere definita positiva. In ciò che segue assumeremo che queste condizioni siano soddisfatte.

Per semplificare le notazioni, d'ora in poi denotiamo δq con \mathbf{q} , vale a dire, stipuliamo che il vettore \mathbf{q} di componenti q_1, \dots, q_r rappresenti gli scostamenti dalla punto di equilibrio stabile del potenziale che è quindi caratterizzato dalla configurazione $\mathbf{q} = 0$. Usiamo la notazione vettoriale perché il sistema è lineare e lo spazio delle configurazioni può essere trattato come un spazio vettoriale. Allora la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \sum_{ij} [M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - K_{ij} q_i q_j] = \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, M \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, K \mathbf{q} \rangle \quad (7.1)$$

approssima al prim'ordine la lagrangiana originaria; nel secondo passaggio abbiamo introdotto le matrici

$$M = (M_{ij}), \quad K = (K_{ij}).$$

Una lagrangiana di questo tipo con matrici M e K definite positive definisce il modello matematico per la teoria delle *piccole oscillazioni*. Le equazioni di Eulero-Lagrange sono (esercizio)

$$\sum_j (M_{ij} \ddot{q}_j + K_{ij} q_j) = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad (7.2)$$

ovvero, in notazione vettoriale

$$M \ddot{\mathbf{q}} + K \mathbf{q} = 0. \quad (7.3)$$

¹Si noti che una matrice simmetrica, reale, ammette sempre un insieme completo di autovettori con autovalori reali.

7.1.2 Soluzione delle piccole oscillazioni = diagonalizzazione della matrice dinamica

Invece di risolvere direttamente l'equazione (7.2) (come di solito si fa in un corso di meccanica analitica), preferiamo passare alla formulazione hamiltoniana della teoria delle piccole oscillazioni, il che ci sarà d'aiuto quando estenderemo la teoria ai sistemi quantistici. Il vettore impulso $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_r)$ è (esercizio)

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M\dot{\mathbf{q}}$$

e quindi l'hamiltoniana associata alla lagrangiana (7.1) è (esercizio)

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p}, M^{-1}\mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}, K\mathbf{q}) \quad (7.4)$$

Consideriamo adesso la seguente trasformazione canonica

$$\mathbf{q} = M^{1/2}\mathbf{q} \quad \mathbf{p} = M^{-1/2}\mathbf{p} \quad (7.5)$$

(esercizio: mostrare che la trasformazione è canonica). In termini delle nuove variabili, l'hamiltoniana diventa

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}, \mathcal{D}\mathbf{q}) \quad (7.6)$$

dove

$$\mathcal{D} = M^{-1/2}KM^{-1/2} \quad (7.7)$$

è la cosiddetta *matrice dinamica*. Si tratta di una matrice auto-aggiunta² e definita positiva.

Le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili sono (esercizio):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\mathcal{D}\mathbf{q}. \end{cases} \quad (7.8)$$

da cui seguono le equazioni del moto

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathcal{D}\mathbf{q}. \quad (7.9)$$

Lo studio delle soluzioni delle equazioni ricalca i metodi della meccanica quantistica, in particolare si utilizza il teorema spettrale. Poiché \mathcal{D} è una matrice auto-aggiunta, il problema agli autovalori

$$\mathcal{D}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

ammette una soluzione completa: la matrice ha r auto-valori λ_M , $M = 1, \dots, r$, alcuni dei quali eventualmente coincidenti (degenerazione); i corrispondenti auto-vettori \mathbf{u}_M sono ortogonali tra loro e, presi per comodità normalizzati a uno, formano una base ortonormale in \mathbb{R}^r . Poiché \mathcal{D} è definita positiva, gli autovalori sono positivi e d'ora in poi verranno denotati ω_M^2 , $M = 1, \dots, r$. Allora, per il teorema spettrale,

$$\mathcal{D} = \sum_M \omega_M^2 |\mathbf{u}_M\rangle\langle\mathbf{u}_M|, \quad \sqrt{\mathcal{D}} = \sum_M \omega_M |\mathbf{u}_M\rangle\langle\mathbf{u}_M|, \text{ con } \omega_M \text{ positivo}$$

²Più precisamente, simmetrica, visto che lo spazio vettoriale è reale.

Possiamo esprimere la soluzione delle equazioni del moto come

$$\begin{cases} \mathbf{q}(t) = \cos(\sqrt{\mathcal{D}}t) \mathbf{q} + \sqrt{\mathcal{D}}^{-1} \sin(\sqrt{\mathcal{D}}t) \mathbf{p} \\ \mathbf{p}(t) = -\sqrt{\mathcal{D}} \sin(\sqrt{\mathcal{D}}t) \mathbf{q} + \cos(\sqrt{\mathcal{D}}t) \mathbf{p} \end{cases} \quad (7.10)$$

come può essere facilmente verificato per sostituzione; $\mathbf{q} = \mathbf{q}(0)$ e $\mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$ sono le condizioni iniziali. Il teorema spettrale garantisce che la funzione di un operatore auto-aggiunto è ben definita. In particolare sono ben definite le funzioni trigonometriche di $\sqrt{\mathcal{D}}$ che compaiono in (7.10). Si ha

$$\cos(\sqrt{\mathcal{D}}t) = \sum_M \cos(\omega_M t) |\mathbf{u}_M\rangle \langle \mathbf{u}_M|$$

e analogamente per le altre funzioni. Quindi, espandendo \mathbf{q} e \mathbf{p} nella base \mathbf{u}_M ,

$$\mathbf{q} = \sum_M \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{q} \rangle \mathbf{u}_M \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \sum_M \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{p} \rangle \mathbf{u}_M$$

dove

$$Q_M = \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{q} \rangle \quad \text{e} \quad P_M = \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{p} \rangle \quad (7.11)$$

sono le cosiddette *coordinate normali*, la formula per $\mathbf{q}(t)$ diventa

$$\mathbf{q}(t) = \sum_M \left[\cos(\omega_M t) Q_M \mathbf{u}_M + \frac{\sin(\omega_M t)}{\omega_M} P_M \mathbf{u}_M \right] \quad (7.12)$$

e analogamente per $\mathbf{p}(t)$.

Si osservi che se le condizioni iniziali sono lungo la direzione di un autovettore, diciamo \mathbf{u}_M , vale a dire,

$$\mathbf{q} = Q_M \mathbf{u}_M \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = P_M \mathbf{u}_M,$$

allora l'evoluzione temporale è

$$\mathbf{q}(t) = \cos(\omega_M t) Q_M \mathbf{u}_M + \frac{\sin(\omega_M t)}{\omega_M} P_M \mathbf{u}_M. \quad (7.13)$$

Infine, si osservi infine che l'hamiltoniana (7.6) può essere riscritta come (esercizio)

$$H = \sum_M \frac{1}{2} P_M^2 + \omega_M^2 Q_M^2, \quad (7.14)$$

Il significato fisico è il seguente. Gli autovalori ω_M , $M = 1, \dots, r$, sono le *frequenze caratteristiche* del sistema. I corrispondenti autovettori rappresentano i modi normali del sistema. Quando viene eccitato un solo modo normale, l'evoluzione del sistema è quella di un moto armonico: tutte le parti del sistema si muovono sinusoidalmente con la stessa frequenza e stessa fase, come espresso dalla (7.13). Il movimento più generale del sistema è una sovrapposizione dei modi normali, come espresso dalla (7.12). I modi sono normali nel senso che possono muoversi in modo indipendente, vale a dire che un'eccitazione di un modo non causerà mai l'eccitazione di un modo differente. Questa è una conseguenza del fatto che i modi normali sono ortogonali tra loro. In altre parole, come espresso dalla (7.14), il sistema consiste in un insieme di oscillatori armonici indipendenti.

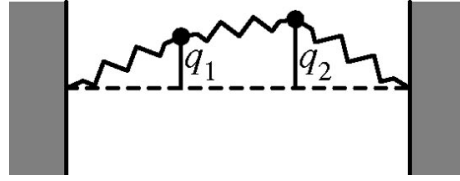


Figura 7.1: Un sistema a due particelle, che mostra le posizioni q_1 e q_2 delle due masse (punti), che sono vincolate a muoversi verticalmente e sono collegate da molle. (Figura tratta da [Johnson2002].)

Concludiamo questo argomento con una formula esplicita per le coordinate normali, in termini delle coordinate originarie $q_1, \dots, q_r, p_1, \dots, p_r$. Se \mathbf{e}_n , $n = 1, \dots, r$, è la base in \mathbb{R}^r che corrisponde alle coordinate originarie, cioè $q = \sum_n q_n \mathbf{e}_n$ e $p = \sum_n p_n \mathbf{e}_n$, allora la (7.11), tenuto conto della (7.5), diventa

$$\begin{aligned} Q_M &= \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{u}_M | M^{1/2} \mathbf{q} \rangle = \sum_n \langle \mathbf{u}_M | M^{1/2} \mathbf{e}_n \rangle q_n \\ P_M &= \langle \mathbf{u}_M | \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{u}_M | M^{-1/2} p \rangle = \sum_n \langle \mathbf{u}_M | M^{-1/2} \mathbf{e}_n \rangle p_n \end{aligned} \quad (7.15)$$

Si osservi che la trasformazione $(q_n, p_n) \rightarrow (Q_M, P_M)$ è canonica (esercizio).

Box 7.1 — Due oscillatori accoppiati linearmente. Come esempio molto semplice dello studio dei modi normali e delle frequenze caratteristiche, consideriamo un sistema descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 (q_1 - q_2)^2$$

Questo sistema può essere visto come due oscillatori armonici unidimensionali identici di frequenza naturale ω , con un accoppiamento da una forza armonica di stessa frequenza naturale ω . Vedere la figura 7.1. (Si lascia come esercizio lo studio del caso in cui la frequenza naturale dell'accoppiamento è diversa da ω).

Questa Hamiltoniana è della forma (7.4) per

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \text{ e } \quad K = m\omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice dinamica è

$$\mathcal{D} = M^{-1/2} K M^{-1/2} = \omega^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ è $(2 - \lambda)^2 - 1 = 0$ e quindi gli autovalori di A sono dati da

$$2 - \lambda_1 = 1, \quad 2 - \lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

Dunque, le frequenze caratteristiche del sistema sono

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega \\ \omega_2 = \sqrt{3}\omega \end{cases}$$

Gli autovettori (normalizzati) \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 associati agli autovalori λ_1 e λ_2 sono dati dalle equazioni

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ponendo $\lambda = \lambda_{1,2}$. Con un calcolo elementare, si trova

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Le coordinate normali (equazione (7.15)) sono

$$Q_1 = \sqrt{m} \langle \mathbf{u}_1 | q \rangle = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} (q_1 + q_2), \quad P_1 = \langle u_1 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2m}} (p_1 + p_2)$$

e

$$Q_2 = \sqrt{m} \langle \mathbf{u}_2 | q \rangle = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} (q_1 - q_2), \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} \langle u_2 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2m}} (p_1 - p_2)$$

Si veda la figura 7.2. Allora l'hamiltoniana in coordinate normali diventa

$$H = \frac{1}{2} (P_1^2 + \omega_1^2 Q_1^2) + \frac{1}{2} (P_2^2 + \omega_2^2 Q_2^2)$$

e, come si può verificare semplicemente per calcolo diretto, coincide con l'hamiltoniana di partenza.

Box 7.2 — Catena armonica con condizioni di Dirichlet. L'esempio paradigmatico di sistema le cui equazioni del moto sono della forma (7.3) è la catena armonica del box 1.4. Riprendiamo l'esempio risolvendo le equazioni del moto con tutti i crismi del caso.

Il sistema è una catena di N punti materiali di massa m , collegati da molle di identica costante di richiamo k e di lunghezza di equilibrio a . Le equazioni del moto per gli scostamenti q_n dalle posizioni di equilibrio di una catena armonica,

$$\ddot{q}_n = \omega_0^2 (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}), \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (1.43)$$

possono essere riscritte nella forma (7.3) con M la matrice identica e K la matrice

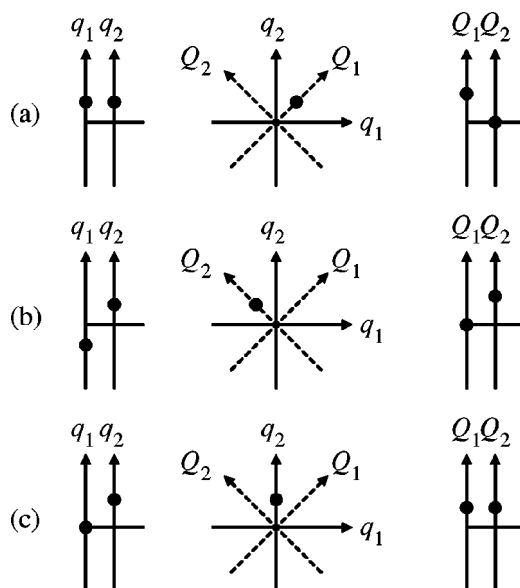


Figura 7.2: Grafico del sistema in ciascuno dei suoi modi normali (a) e (b). L'ampiezza degli spostamenti è arbitraria. (c) Il sistema con una massa spostata dall'equilibrio e l'altra nella sua posizione di equilibrio (due modi sono eccitati). (Figura tratta da [Johnson2002].)

$N \times N$

$$K = -\omega_0^2 \Delta \quad \text{dove } \Delta \text{ è la matrice } \begin{pmatrix} & & & \vdots & & & \\ \dots & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & \dots \\ & & & & & \vdots & \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

per cui le equazioni del moto in forma vettoriale sono

$$\ddot{\mathbf{q}} = \omega_0^2 \Delta \mathbf{q}. \quad (7.17)$$

con Δ data dalla matrice sopra. Queste sono le equazioni di Eulero-Lagrange associate alla funzione di Lagrange

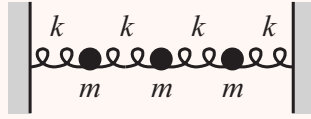
$$L = \frac{1}{2} m \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle - \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle \mathbf{q}, -\Delta \mathbf{q} \rangle \quad (7.18)$$

a cui corrisponde l'energia del sistema

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle \mathbf{q}, -\Delta \mathbf{q} \rangle \quad (7.19)$$

Nella formula sopra per K non abbiamo volutamente indicato che cosa succede alla prima riga e alla prima colonna e nell'angolo in alto a sinistra e all'ultima riga e ultima colonna nell'angolo in basso a destra perché questo dipende dalle condizioni al contorno. Per condizioni al contorno di Dirichlet, la prima e l'ultima massa della catena sono

vincolate a delle pareti; per esempio, per 3 masse, la situazione è



(7.20)

e quindi, come si può facilmente vedere,

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

Risolviamo le equazioni (7.17) per separazione delle variabili, cerchiamo cioè soluzioni della forma $\mathbf{q}(t) = f(t)\mathbf{u}$ dove $f(t)$ è uno scalare che dipende solo da t e \mathbf{u} è un vettore che non dipende da t . Per comodità, useremo la notazione $\phi(n, t) = f(t)u(n)$ per le componenti del vettore. Sostituendo nella (1.43) si ottiene

$$\ddot{f}(t)\mathbf{u} = \omega_0^2 f(t)\Delta\mathbf{u}$$

Introduciamo una costante di separazione $-\omega^2$, col segno meno e ω reale, affinché le soluzioni siano limitate, di modo che $f(t)$ soddisfi l'equazione

$$\ddot{f} = -\omega^2 f \quad (7.22)$$

Allora \mathbf{u} dovrà soddisfare l'equazione

$$-\Delta\mathbf{u} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\mathbf{u} \quad (7.23)$$

L'equazione (7.22) ci dice che $f(t)$ è un moto armonico di cui sappiamo vita morte e miracoli, in particolare sappiamo che la f soluzione è della forma

$$f_\omega(t) = \mathcal{A} \cos(\omega t + \gamma) \quad (7.24)$$

Scriviamo l'equazione (7.23) per le componenti $u(n)$ del vettore \mathbf{u} :

$$u(n+1) - 2u(n) + u(n-1) = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}u(n)$$

che riconosciamo come l'equazione agli autovalori per il laplaciano discreto in una dimensione. Facciamo allora l'ipotesi che u_n sia della forma $e^{in\theta}$, con θ da determinarsi sostituendo $e^{in\theta}$ nella (7.23):

$$e^{in\theta}e^{i\theta} - 2e^{in\theta} + e^{in\theta}e^{-i\theta} = -\frac{\omega^2}{2\omega_0^2}2e^{in\theta}$$

Quindi, per θ tale che

$$\cos\theta = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2}, \quad (7.25)$$

$e^{in\theta}$ è proprio soluzione della (7.23). Ma se $e^{in\theta}$ è soluzione, lo è anche $e^{-in\theta}$ che è linearmente indipendente da $e^{in\theta}$. Quindi, $u(n)$ può essere espresso come combinazione lineare di $e^{in\theta}$ e $e^{-in\theta}$ o, equivalentemente, come combinazione lineare di seni e coseni, vale a dire come

$$a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta),$$

dove a e b sono costanti reali. Allora, le soluzioni a variabili separabili sono della forma

$$q(n, t) = \cos(\omega t + \gamma) [a \cos(n\theta) + b \sin(n\theta)] \quad (7.26)$$

dove abbiamo assorbito la costante \mathcal{A} della (7.24) nelle costanti arbitrarie a e b . Il significato fisico della separabilità delle variabili è che una soluzione di questo tipo rappresenta un *modo normale*: tutte le masse della catena nel corso oscillano all'unisono in modo sinusoidale con stessa frequenza ω e stessa fase γ .

L'equazione (7.25) è di solito scritta esprimendo ω^2 in funzione di θ , cioè come $\omega^2 = 2\omega_0^2(1 - \cos\theta)$ e poiché $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$, si ha

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| \quad (7.27)$$

(abbiamo la radice positiva, poiché la convenzione è che ω sia positiva). Questa equazione (o equivalentemente la (7.25)) stabilisce il legame tra il parametro θ , che regola il profilo spaziale del modo, e la frequenza ω di oscillazione del modo. L'equazione (7.27) è detta *relazione di dispersione*. È importante osservare che la relazione di dispersione è determinata unicamente dalle equazioni del moto e non dalle condizioni al contorno. Le condizioni al contorno fissano dei vincoli sui possibili valori di θ (che per il momento è arbitrario) e quindi su ω .

Condizioni al contorno di Dirichlet. Per tenere conto del vincolo alle pareti introduciamo due particelle fittizie una all'inizio e l'altra alla fine della catena tali che le loro posizioni sono costantemente mantenute uguali a zero

$$q_0(t) = 0, \quad q_{N+1}(t) = 0 \quad (7.28)$$

Studiamo le soluzioni (7.26) sotto queste condizioni. La condizione al primo estremo della catena implica $a = 0$, per cui

$$q_n(t) = b \cos(\omega t + \gamma) \sin(n\theta)$$

e la condizione di annullamento al secondo estremo

$$b \cos(\omega t + \gamma) \sin[(N+1)\theta] = 0$$

che deve valere per tutti i tempi t porta alla condizione

$$(N+1)\theta = M\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{M\pi}{N+1}, \quad M = 1, 2, \dots, N$$

In corrispondenza di questi valori di θ , la relazione di dispersione (7.27) diventa

$$\omega = \omega_M = 2\omega_0 \sin \left[\frac{M\pi}{2(N+1)} \right], \quad M = 1, 2, \dots, N \quad (7.29)$$


Ci sono quindi N modi normali rappresentati dai vettori $\mathbf{q}_M(t)$, $M = 1, 2, \dots, N$ di componenti

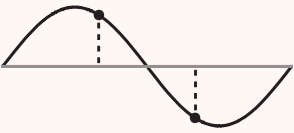
$$q_M(n, t) \propto \cos(\omega_M t + \gamma) \sin \left[\frac{nM\pi}{N+1} \right] \quad (7.30)$$

dove la costante di proporzionalità può dipendere da M . Quindi le ampiezze e le frequenze d'oscillazione dell' M -esimo modo sono, rispettivamente

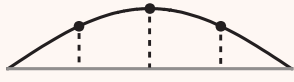
$$\mathcal{A}_M(n) \propto \sin \left[\frac{nM\pi}{N+1} \right], \quad \omega_M = 2\omega_0 \sin \left[\frac{M\pi}{2(N+1)} \right] \quad (7.31)$$

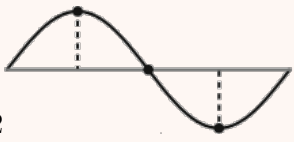
Per esempio, per $N = 2$ si hanno due modi

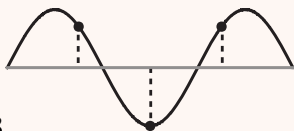
$M = 1$  $\mathcal{A}_1 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ $\omega_1 = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi}{6} \right)$

$M = 2$  $\mathcal{A}_2 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}$ $\omega_2 = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$

Mentre per $N = 3$ si hanno tre modi

$M = 1$  $\mathcal{A}_1 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}$ $\omega_1 = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi}{8} \right)$

$M = 2$  $\mathcal{A}_2 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \pi \\ \sin \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$ $\omega_2 = 2\omega_0 \sin \left(\frac{\pi}{4} \right)$

$M = 3$  $\mathcal{A}_3 \propto \begin{pmatrix} \sin \frac{3\pi}{4} \\ \sin \frac{3\pi}{2} \\ \sin \frac{9\pi}{4} \end{pmatrix}$ $\omega_3 = 2\omega_0 \sin \left(\frac{3\pi}{8} \right)$

Conviene definire delle ampiezze normalizzate:

$$u_M(n) = \mathcal{N} \sin \left[\frac{nM\pi}{N+1} \right], \quad M = 1, 2, \dots, N \quad (7.32)$$

con \mathcal{N} tale che

$$\|\mathbf{u}_M\|^2 = \langle \mathbf{u}_M, \mathbf{u}_M \rangle = \sum_n u_M(n)^2 = 1.$$

Con un pochino di algebra e trigonometria si dimostra che (esercizio)

$$\sin^2 \left[\frac{M\pi}{N+1} \right] + \sin^2 \left[\frac{2M\pi}{N+1} \right] + \dots + \sin^2 \left[\frac{Nm\pi}{N+1} \right] = \frac{N+1}{2}$$

per ogni $M = 1, 2, \dots, N$. Quindi $\mathcal{N} = \sqrt{2/(N+1)}$ e

$$u_M(n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \left[\frac{nM\pi}{N+1} \right], \quad M = 1, 2, \dots, N \quad (7.33)$$

Possiamo allora riscrivere la (7.30) come

$$\mathbf{q}_M(t) \propto \cos(\omega_M t + \gamma) \mathbf{u}_M \quad (7.34)$$

I vettori \mathbf{u}_M sono gli autovettori normalizzati della matrice Δ . Per le condizioni al contorno di Dirichlet, Δ è una matrice simmetrica, come la (7.21). Allora i vettori \mathbf{u}_M sono ortogonali tra loro, e poiché sono normalizzati, si ha

$$\langle \mathbf{u}_M, \mathbf{u}_{M'} \rangle = \sum_n u_M(n) u_{M'}(n) = \delta_{MM'} \quad (7.35)$$

Dunque i vettori \mathbf{u}_M , $M = 1, 2, \dots, N$, formano una base ortonormale.

Poiché $\{\mathbf{u}_M\}$ è una base ortonormale, una qualunque soluzione delle equazioni del moto (1.43) può essere espressa come combinazione lineare delle (7.34):

$$\mathbf{q}(t) = \sum_M c_M \cos(\omega_M t + \gamma) \mathbf{u}_M \quad (7.36)$$

dove le costanti c_M sono determinate dalle condizioni iniziali. Per $t = 0$ si ha

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}(0) = \sum_M c_M \cos \gamma \mathbf{u}_M.$$

Definiamo variabili Q_M ponendo

$$c_M \cos \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} Q_M.$$

Perché mai dividiamo per la massa è, a questo stadio, del tutto incomprensibile; la sua utilità risulterà chiara alla fine. Sia come sia, con queste stipulazioni, la configurazione al tempo iniziale è

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_M Q_M \mathbf{u}_M \quad (7.37a)$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri di questa equazione per $\sqrt{m}\mathbf{u}_M$, otteniamo $\sqrt{m}\langle \mathbf{u}_{M'}, \mathbf{q} \rangle = \sum_M Q_M \langle \mathbf{u}_{M'}, \mathbf{u}_M \rangle = Q_{M'}$ (per la (7.35)). Quindi $Q_M = \sqrt{m}\langle \mathbf{u}_M, \mathbf{q} \rangle$, vale a dire,

$$Q_M = \sqrt{m} \sum_n q_M(n) u_M(n) \quad (7.37b)$$

Le (7.37) definiscono una trasformazione invertibile dal vettore \mathbf{q} al vettore \mathbf{Q} di componenti Q_M , $M = 1, \dots, N$. Osserviamo che esse sono (per $m = 1$) le usuali *trasformate-seno di Fourier discrete* che si usano nel calcolo numerico. In teoria delle piccole oscillazioni, le \mathbf{Q} sono chiamate *coordinate normali*.

Consideriamo adesso la velocità che segue dalla (7.36):

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \sum_M c_M(-\omega_M) \sin(\omega_M t + \gamma) \mathbf{u}_M \quad (7.38)$$

Per $t = 0$ abbiamo

$$\dot{\mathbf{q}} \equiv \dot{\mathbf{q}}(0) = \sum_M c_M(-\omega_M) \sin(\gamma) \mathbf{u}_M.$$

Analogamente a prima, definiamo variabili \dot{Q}_M ponendo

$$c_M(-\omega_M) \sin(\gamma) \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \dot{Q}_M,$$

per cui la velocità iniziale può essere espressa come

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_M \dot{Q}_M \mathbf{u}_M \quad (7.39)$$

Il significato fisico delle coordinate normali Q_M e \dot{Q}_M risulta chiaro se calcoliamo l'energia totale (7.19). Essendo l'energia una costante del moto, ci basta valutarla per $t = 0$. L'energia cinetica per $t = 0$ è

$$T = \frac{1}{2} m \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle = \frac{1}{2} m \left\langle \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_M \dot{Q}_M \mathbf{u}_M, \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{M'} \dot{Q}_{M'} \mathbf{u}_{M'} \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_M \dot{Q}_M^2$$

e l'energia potenziale per $t = 0$ è

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle \mathbf{q}, -\Delta \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left\langle \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_M Q_M \mathbf{u}_M, \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{M'} Q_{M'} (-\Delta) \mathbf{u}_{M'} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \left\langle \sum_M Q_M \mathbf{u}_M, \sum_{M'} Q_{M'} \frac{\omega_{M'}^2}{\omega_0^2} \mathbf{u}_{M'} \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_M \omega_M^2 Q_M^2 \end{aligned}$$

Arriviamo così alla seguente formula per l'energia

$$\mathcal{E} = \sum_M \left[\frac{1}{2} \dot{Q}_M^2 + \frac{1}{2} \omega_M^2 Q_M^2 \right] \quad (7.40)$$

Il sistema è dunque una *collezione di oscillatori armonici indipendenti* di massa unitaria e frequenze ω_M ; le variabili che oscillano indipendente l'una dall'altra sono le coordinate normali.

È istruttivo considerare questo risultato dal punto di vista delle trasformazioni canoniche. In primo luogo, osserviamo che la funzione di Hamilton definita da \mathcal{E} è

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \sum_M [P_M^2 + \omega_M^2 Q_M^2] = \frac{1}{2} \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{Q}, \Omega^2 \mathbf{Q} \rangle \quad (7.41)$$

dove Ω^2 è la matrice diagonale di componenti $\omega_M^2 \delta_{MM'}$. Le soluzioni delle equazioni di Hamilton,

$$\begin{aligned} Q_M(t) &= \cos(\omega_M t) Q_M + \frac{\sin(\omega_M t)}{m\omega_M} P_M \\ P_M(t) &= -m\omega_M \sin(\omega_M t) Q_M + \cos(\omega_M t) P_M, \end{aligned}$$

sono proprio le soluzioni per l'oscillatore armonico in funzione delle condizioni iniziali $Q_M \equiv Q_M(0)$ e $P_M \equiv P_M(0)$.

L'hamiltoniana nelle variabili originarie è

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}, \mathcal{D} \mathbf{q} \rangle, \quad \text{con } \mathcal{D} \equiv -m\omega_0^2 \Delta \quad (7.42)$$

dove $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$. Le equazioni (7.37) e (7.39) definiscono la trasformazione canonica tale che $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$.

Per verificare questo, si introduca la matrice U le cui colonne sono i vettori \mathbf{u}_M :

$$U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_N) \quad (7.43)$$

allora la (7.37) può essere riscritta come

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{m}} U \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \sqrt{m} U^{-1} \mathbf{q} \quad (7.44)$$

Si osservi che U è ortogonale perché i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N$ formano una base ortonormale e quindi $U^T = U^{-1}$. In particolare (ricordi di algebra e geometria), è la matrice che diagonalizza \mathcal{D} :

$$U^{-1} \mathcal{D} U = \Omega^2. \quad (7.45)$$

Similmente, dalla (7.39) segue la legge di trasformazione per l'impulso

$$\mathbf{p} = \sqrt{m} U \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{m}} U^{-1} \mathbf{p} \quad (7.46)$$

A questo punto, si vede che la trasformazione è del tipo (3.40) con $B = C = 0$ e

$$A = \sqrt{m} U^{-1}, \quad D = \frac{1}{\sqrt{m}} U^{-1}.$$

Allora

$$AD^T = U^{-1} (U^{-1})^T = U^{-1}U = \mathbb{1}$$

e la condizione (3.42) è quindi soddisfatta. Dunque la trasformazione è canonica.

7.1.3 C'è ancora qualcosa da dire sull'oscillatore armonico?

Forse sì. Sidney Coleman, un noto fisico teorico esperto di teoria dei campi morto una decina di anni fa, una volta disse: “La carriera di un giovane fisico teorico consiste nel trattare l'oscillatore armonico in livelli di astrazione sempre più elevati.”

L'equazione del movimento per un semplice oscillatore armonico di massa m e frequenza ω segue all'hamiltoniana

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Q^2 \quad (1.17)$$

dove Q è la posizione dell'oscillatore e P il suo impulso coniugato. Lo stato del sistema al tempo t è completamente determinato dalle coordinate $(Q(t), P(t))$ e l'evoluzione di temporale è data dalle equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} \\ \dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = -m\omega^2 Q, \end{aligned}$$

che si riducono alla forma familiare delle equazioni del moto di un oscillatore armonico semplice $\ddot{Q} = -\omega^2 Q$. Usando il formalismo complesso è naturale scrivere la soluzione di questa equazione come

$$\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}, \quad (7.47)$$

dove $\alpha(0)$ è un numero complesso. Allora $Q(t)$ e $P(t)$ sono ottenute da $\alpha(t)$ prendendone la parte reale e la parte immaginaria. Se vogliamo che α sia adimensionale, le espressioni per Q e P diventano

$$Q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\bar{\alpha}(t) + \alpha(t)) \quad (7.48)$$

$$P(t) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (\bar{\alpha}(t) - \alpha(t)) \quad (7.49)$$

dove \hbar è una costante che ha le dimensioni di un'azione. Questo può essere riscritto per rendere più chiari i significati di α e $\bar{\alpha}$:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\sqrt{m\omega} Q(t) + \frac{i}{\sqrt{m\omega}} P(t) \right] \quad (7.50)$$

$$\bar{\alpha}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left[\sqrt{m\omega} Q(t) - \frac{i}{\sqrt{m\omega}} P(t) \right]. \quad (7.51)$$

Dunque, lo stato del sistema per questo oscillatore armonico è determinato da un punto nello spazio di fase $(Q(t), P(t))$, ma ogni coppia ordinata di numeri può essere scritta come un numero complesso e α fa proprio questo. Quindi, α è una rappresentazione compatta dello stato (Q, P) nello spazio delle fasi del sistema. Inoltre, l'hamiltoniana può essere riscritta come

$$H = \hbar\omega\bar{\alpha}\alpha = \hbar\omega|\alpha|^2 \quad (7.52)$$

7.1.4 Forma complessa delle equazioni canoniche*

Il gioco formale per rappresentare l'oscillatore armonico in forma complessa (in modo del tutto analogo a quello che si fa per i circuiti elettrici) ha un significato più profondo e vale per un qualunque sistema hamiltoniano di coordinate canoniche $q = (q_1, \dots, q_r)$ e $p = (p_1, \dots, p_r)$. Si consideri una hamiltoniana generica $H = H(q, p)$ che genera le equazioni canoniche

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}\quad (1.12b)$$

e si operi il seguente cambiamento di variabili

$$\alpha = aq + ibp, \quad \bar{\alpha} = \bar{a}q - i\bar{b}p \quad (7.53)$$

dove adesso α è un vettore complesso e a e b sono numeri complessi che possono essere scelti a nostro piacimento; ci riserviamo di sceglierli in maniera opportuna per semplificare la funzione di Hamilton. Nel caso unidimensionale, La formula di inversione è

$$q = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{a + \bar{a}} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2\text{Re}(a)}, \quad p = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{i(b + \bar{b})} = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i\text{Im}(b)}, \quad (7.54)$$

Allora la funzione di Hamilton H diventa una funzione (ovviamente a valori reali) delle variabili complesse α e $\bar{\alpha}$ (trattate come variabili indipendenti).

Dalle equazioni di Hamilton si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{dt} &= a \frac{\partial H}{\partial p} - ib \frac{\partial H}{\partial q} = a \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial p} \right) - ib \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial q} \right) \\ &= a \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} ib + \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} (-i\bar{b}) \right) - ib \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} a + \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} \bar{a} \right) = -i(a\bar{b} + b\bar{a}) \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}}\end{aligned}$$

Quindi, posto

$$\frac{1}{\hbar} \equiv a\bar{b} + b\bar{a}, \quad (7.55)$$

le equazioni per α assumono la forma

$$i\hbar\dot{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\alpha}} \quad (7.56)$$

Si osservi che se si scelgono le costanti a e b in modo tale che α e $\bar{\alpha}$ siano quantità adimensionate, allora \hbar ha le dimensioni di un'azione; poichè la scelta di a e b è convenzionale, anche il valore di \hbar è convenzionale.

Nel formalismo complesso, la parentesi di Poisson (3.26) diventa (esercizio)

$$\{f, g\} = -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \bar{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right). \quad (7.57)$$

Risulta utile introdurre la parentesi di Poisson complessa

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial g}{\partial \bar{\alpha}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial g}{\partial \alpha} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} \frac{\partial g}{\partial \bar{\alpha}_i} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\alpha}_i} \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} \quad (7.58)$$

e riscrivere la (7.57) come

$$\{f, g\} = -\frac{i}{\hbar} [f, g]. \quad (7.59)$$

Si lascia come esercizio verificare la (7.57) e mostrare che valgono le *relazioni canoniche complesse*

$$[\alpha_i, \alpha_j] = 0 \quad [\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j] = 0 \quad [\alpha_i, \bar{\alpha}_j] = \delta_{ij} \quad (7.60)$$

Queste relazioni sono l'analogo delle relazioni canoniche (3.31) e giocano, nel formalismo complesso, lo stesso ruolo. In particolare, permettono di caratterizzare una trasformazione canonica complessa.

Box 7.3 — Oscillatore armonico. Riotteniamo la formulazione complessa dell'oscillatore armonico. Operando la sostituzione (7.54) nell'hamiltoniana (1.17), si ottiene un'espressione che coinvolge solo le parti reali di a e b . Quindi, senza perdita di generalità, possiamo assumere che le parti immaginarie di a e b siano nulle. Otteniamo così

$$H = -\frac{1}{8mb^2}(\alpha - \bar{\alpha})^2 + \frac{m\omega^2}{8a^2}(\alpha + \bar{\alpha})^2$$

Si possono scegliere a e b in modo da semplificare la funzione di Hamilton. Se si sceglie

$$\frac{1}{8mb^2} = \frac{m\omega^2}{8a^2} = \frac{\omega}{4}, \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} \quad (7.61)$$

allora $H = \omega\bar{\alpha}\alpha = \omega|\alpha|^2$, per cui

$$\frac{1}{\hbar} = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2}} \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} = 1$$

Se si vuole avere α e $\bar{\alpha}$ adimensionati, invece delle espressioni per a e b date dalla (7.61), si dovrà prendere

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}.$$

Con questa scelta si ottiene per α la formula (7.50) e $H = \hbar\omega\bar{\alpha}\alpha = \hbar\omega|\alpha|^2$. Per la (7.56), chiaramente le equazioni per α non cambiano (abbiamo semplicemente moltiplicato e diviso per la stessa costante).

7.2 Analisi in modi normali del campo scalare

7.2.1 Un singolo modo di un campo libero è un oscillatore armonico

Incominciamo con l'equazione campo più semplice, l'equazione di D'Alembert per la corda vibrante $\ddot{\phi} = c^2\phi''$. Ne cerchiamo soluzioni a variabili separabili, cioè della forma

$$\phi(x, t) = Q(t)u(x).$$

In termini fisici, soluzioni di questa forma rappresentano i *modi normali* della corda. Inserendo una funzione di questo tipo nell'equazione otteniamo $\ddot{Q}u = c^2Qu''$, ossia $\ddot{Q}/Q = c^2u''/u$. Allora ciascuno dei due termini deve essere uguale ad una costante, che porremo

uguale a $-\omega^2$, per garantire che le soluzioni rimangano limitate nel corso del tempo, e l'equazione di D'Alembert si separa nelle due equazioni

$$\ddot{Q} + \omega^2 Q = 0 \quad (7.62)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0 \quad (7.63)$$

La prima è l'equazione dell'oscillatore armonico, la seconda ha soluzioni indipendenti e^{ikx} e e^{-ikx} , dove $k^2 \equiv \omega^2/c^2$. Per procedere, occorre tenere conto delle condizioni al contorno. Per una corda vibrante tenuta fissa agli estremi 0 e L , se scegliamo per comodità pari a zero il valore del campo agli estremi, le condizioni al bordo sono di Dirichlet omogenee: $u(0) = u(L) = 0$. Questo implica che l'unica combinazione ammessa delle due soluzioni indipendenti è $\sin kx = (e^{ikx} - e^{-ikx})/(2i)$ e che $\sin kL = 0$. Da quest'ultima condizione segue che i soli valori ammessi di k sono quelli che soddisfano $kL = M\pi$, $M = 1, 2, 3, \dots$, da cui $k = k_M = M\pi/L$ ("M" sta per "modo"). Osserviamo che l'insieme di funzioni $u_M = C_L \sin(k_M x)$, per $M = 1, 2, 3, \dots$ e C_L costante di normalizzazione, è una base ortogonale, cioè

$$\int u_M u_{M'} dx = 0 \quad \text{per } M \neq M'.$$

(se scegliamo $C_L = \sqrt{2/L}$, le funzioni u_M hanno norma L^2 unitaria). Ciascuna di queste funzioni, detta *funzione di modo*, moltiplicata per una soluzione $Q_M(t)$ dell'oscillatore armonico di frequenza $\omega = ck_M = cM\pi/L$, $M = 1, 2, 3, \dots$,

$$\phi(x, t) = Q_M(t) u_M(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_M}} [\bar{\alpha}_M(t) + \alpha_M(t)] u_M(x), \quad (7.64)$$

è un modo normale della corda vibrante vincolata agli estremi, cioè un movimento in cui tutte le parti della corda si muovono sinusoidalmente con la stessa frequenza e con una relazione di fase fissa. La seconda uguaglianza nella (7.64) esprime la coordinata dell'oscillatore in termini delle variabili complesse α_M e $\bar{\alpha}_M$.

Spesso si usa un altro insieme di funzioni modali che non corrisponde a nessuna condizione al contorno fisica, ma che è molto utile nell'analisi teorica di un campo nello spazio libero. È ottenuto imponendo le cosiddette *condizioni al contorno periodiche* che furono introdotte da Born nello studio dei reticoli cristallini. Le condizioni al contorno periodiche richiedono che il campo sia periodico nello spazio e che non cambi quando le coordinate spaziali sono spostate di un tratto pari al "periodo del reticolo". Nel caso della corda, questo equivale a richiedere che $u(x+L) = u(x)$, che può essere interpretata come una corda sul cerchio. In questo caso, l'insieme ortonormale è parametrizzato dal numero d'onde $k = k_M = 2\pi M/L$, dove adesso M assume valori interi positivi e negativi $M = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ e ciascun membro dell'insieme ha la forma

$$u_M = C_L e^{ikx}, \quad (7.65)$$

dove C_L è una costante di normalizzazione.

La frequenza di ciascun modo normale è soggetta alla stessa *relazione di dispersione* $\omega = c|k|$ della corda vincolata (essendo indipendente dalle condizioni al contorno). Adesso è conveniente utilizzare la rappresentazione complessa dell'oscillatore armonico e scrivere per il singolo modo normale

$$\phi(x, t) = \alpha_M(t) u_M(x) + \bar{\alpha}_M(t) \bar{u}_M(x), \quad (7.66)$$

con il secondo termine che garantisce che il campo ϕ sia reale, come deve essere. La funzione $\alpha_M(t)$ è data dalla (7.47) per $\omega = \omega_M$. Quindi $\phi(x, t)$ è della forma

$$\phi(x, t) = \mathcal{A} \cos(kx - \omega t + \theta)$$

e descrive, per $k > 0$, un'onda sinusoidale che si muove verso destra e, per $k < 0$, un'onda sinusoidale che si muove verso sinistra; \mathcal{A} e θ sono, rispettivamente, l'ampiezza e la fase dell'onda. Si osservi che mentre nel caso della corda vincolata agli estremi, a ω^2 corrisponde una sola funzione di modo, nel caso di condizioni al contorno periodiche, a ω^2 corrispondono due funzioni modali; detto in altri termini, la (7.76), vista come equazione agli autovalori $\lambda = -\omega^2/c^2$ del laplaciano in una dimensione, nel primo caso ha autovalori non degeneri, mentre nel secondo caso gli autovalori sono doppiamente degeneri.

7.2.2 Energia e impulso di un modo normale

Analizziamo il contenuto di energia e impulso di un modo normale.

Energia

La densità di energia u è la componente "00" del tensore energia-impulso (6.14) $T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} (\partial \phi)^2$, cioè

$$u = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} (\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 \right].$$

Per semplicità di notazione facciamo cadere l'indice M e scriviamo $\phi(x, t) = Q(t)u(x)$ per un generico modo normale $\phi(x, t) = Q(t)u(x)$ della corda vibrante con condizioni al contorno di Dirichlet. Allora

$$u = \frac{1}{c^2} \frac{1}{2} \dot{Q}^2 u^2 + \frac{1}{2} Q^2 (\partial_x u)^2 = \frac{C_L^2}{2c^2} \left(\dot{Q}^2 \sin^2(kx) + c^2 k^2 Q^2 \cos^2(kx) \right)$$

L'energia \mathcal{E} del modo normale è ottenuta integrando u tra 0 e L . Le integrazioni di \sin^2 e \cos^2 forniscono ciascuna $(1/2)L$. Quindi, scegliendo la costante di normalizzazione (che è arbitraria) $C_L = c\sqrt{2/L}$, otteniamo

$$\mathcal{E} = \int_0^L u dx = \frac{1}{2} \dot{Q}^2 + \frac{1}{2} c^2 k^2 Q^2 = \hbar \omega \bar{\alpha} \alpha \quad (7.67)$$

che è l'energia di un oscillatore armonico di massa $m = 1$ e frequenza $\omega = c|k|$; nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la formula (7.52) per esprimere l'energia in termini delle coordinate complesse adimensionate α e $\bar{\alpha}$.

L'analisi dell'oscillatore armonico con condizioni al contorno periodiche ci porta alla stessa formula (7.67) per l'energia. Infatti, adesso $\phi(x, t) = \alpha(t)u(x) + \bar{\alpha}(t)\bar{u}(x)$ e quindi

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2c^2} (-i\omega\alpha u + i\omega\bar{\alpha}\bar{u})^2 + \frac{1}{2} (ik\alpha u - ik\bar{\alpha}\bar{u})^2 = -\frac{\omega^2}{2c^2} (\alpha u - \bar{\alpha}\bar{u})^2 - \frac{1}{2} k^2 (\alpha u - \bar{\alpha}\bar{u})^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) (\alpha u - \bar{\alpha}\bar{u})^2 = -k^2 (\alpha^2 u^2 - 2|\alpha|^2 |u|^2 + \bar{\alpha}^2 \bar{u}^2) \end{aligned}$$

avendo usato la relazione di dispersione nell'ultimo passaggio. L'energia è l'integrale di u , ma le integrazioni del primo e dell'ultimo termine non danno contributo (per la periodicità di u) e $|u|^2 = C_L^2$, per cui

$$\mathcal{E} = 2k^2 |\alpha|^2 \int_0^L |u|^2 dx = 2k^2 C_L^2 L |\alpha|^2$$