Dopo Pitagora, Eraclito, Zenone... Nietzsche

'La misura della forza del cosmo [...] non è infinita [...] conseguentemente il numero delle posizioni, dei mutamenti, delle combinazioni e degli sviluppi di questa forza è certamente immane [...] ma in ogni caso [non] è infinito. [...] [invece] il tempo nel quale il cosmo esercita la sua forza è infinito [...] Conseguentemente, lo sviluppo momentaneo deve essere una ripetizione, e cosi' quello che lo ha generato e quello che da esso nasce, e cosi' via: in avanti e all'indietro! Tutto è esistito innumerevoli volte, in quanto la condizione complessiva di tutte le forze ritorna sempre".[1]

In sintesi: in un sistema finito, con un tempo infinito, ogni combinazione può ripetersi infinite volte.

1 Il teorema del ritorno di Poincaré (TRP)

In ogni libro di teoria ergodica, generalmente nella forma:

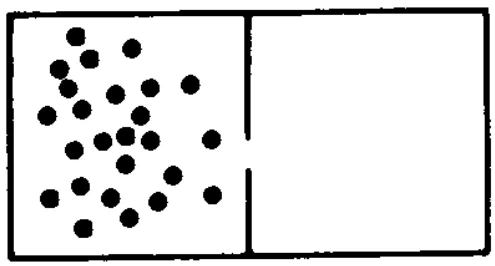
TRP *Se T è una trasformazione che conserva la misura di uno spazio di probabilità $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ed $E \in \mathcal{B}$ con $\mu(E) > 0$, allora esiste un sottoinsieme misurabile $E_0 \subseteq E$ con $\mu(E_0) = \mu(E)$ tale che per ogni $x \in E_0$ esiste una sequenza $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ tale che $T^{n_i}x \in E_0$ per ogni i.*

Il riferimento più comunemente citato è l'opera in tre volumi *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, dove il TRP appare nel capitolo 26 del terzo volume, pubblicato nel 1899. Ma prima di questa data, nel 1893 e poi nel 1896, il TRP era già stato al centro di controversie centrate sul *Wiederkehreinwand* (*obiezione fondata su argomenti che riguardano il ritorno allo stesso stato*) di Zermelo (1871-1953) contro la spiegazione dell'irreversibilità (teorema H) contenuta nella teoria cinetica di Boltzmann (1844-1906).

[1] Friedrich Wilhelm Nietzsche (1844-1900), Frammenti postumi 11[316], dopo la "folgorazione" a Sils-Maria (1881)

2 Paradossi

Se apriamo un setto che divide una metà piena di gas di un contenitore dall'altra metà vuota, dopo un certo tempo le molecole del gas si raccoglieranno nuovamente tutte nella prima metà!



La "soluzione" del paradosso sta nel fatto che questo tempo è enorme, molto più grande della durata del contenitore stesso.

3 Formulazione originale del TRP

Apparsa nella memoria *Sur le probléme des trois corps et les équations de la Dynamique*, Acta Mathematica **13** (1890), 1-270, con la quale Poincaré (1854-1912) vinse il premio bandito da Oscar II, re di Svezia e Norvegia (giuria: Mittag-Leffler, Weierstrass, Hermite).

Théorème *Supposons que le point P reste á distance finie, et que le volume $\int dx_1 dx_2 dx_3$ soit un invariant intégral; si l'on considère une region r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.*

Principio combinatorio (principio della piccionaia + stazionarietà) che iterato fornisce non solo il TRP e vari suoi raffinamenti, ma sta anche alla base di un approccio semplificato ed unificato a vari risultati di combinatoria e teoria dei numeri (Kac, Furstenberg, Weiss, Mendés-France, Bergelson, Hindman, ecc).

"En effet le point P restant à distance finie, ne sortira jamais d'une région limitée R. J'appelle V le volume de cette région R. Imaginons maintenant une région très petite r_0, j'appelle v le volume de cette région. Par chacun des points de r_0 passe une trajectoire que l'on peut regarder comme parcourue par un point mobile suivant la loi définie par nos équations différentielles.

Considérons donc une infinité de points mobiles remplissant au temps 0 la région r_0 et se mouvant ensuite conformément à cette loi. Au temps τ ils rempliront une certaine région r_1, au temps 2τ une région r_2, etc. au temps $n\tau$ une région r_n. Je puis supposer che τ est assez grand et r_0 assez petit pour que r_0 et r_1 n'aient aucun point commun. Le volume étant un invariant intégral, ces diverse régions r_0, r_1, ..., r_n auront même volume v.

Si ces régions n'avaient aucun point commun, le volume totale serait plus grand que nv; mais d'autre part toute ces régions sont intérieures à R, le volume totale est donc plus petit que V. Si donc on a

$$n > V/v$$

il faut que deux au moins de nos régions aient une partie commune. Soient r_p et r_q ces deux régions $(q > p)$. Si r_p et r_q ont une partie commune, il est clair que r_0 et r_{q-p} devront avoir une partie commune".

In linguaggio moderno diviene:

Principio P *Sia μ una misura di probabilità (finitamente additiva) definita su un'algebra $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di un insieme X. Assumendo che gli insiemi $A_n \in \mathcal{B}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ soddisfino, per ogni $n \geq m \geq 0$, la condizione di stazionarietà*

$$\mu(A_n \cap A_m) = \mu(A_0 \cap A_{n-m})$$

e che $\mu(A_0) = a > 0$, esiste un intero positivo $k \leq \left[\frac{1}{a}\right] + 1$ tale che $\mu(A_0 \cap A_k) > 0$.

Dimostrazione del TRP Il Principio P applicato alla sequenza $A_n = T^{-n}E$, $n = 0, 1, 2, \dots$, con $\mu(E) > 0$ assicura l'esistenza di $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E \cap T^{-k}E) > 0$.

Dato $n \in \mathbb{N}$ sia $B_n \subseteq E$ l'insieme (misurabile) dei punti $x \in E$ che non tornano mai in E con $S = T^n$. Se fosse $\mu(B_n) > 0$ allora, applicando ancora il Principio P, si avrebbe $\mu(B_n \cap S^{-k}B_n) > 0$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Ma allora per ogni $x \in B_n \cap S^{-k}B_n$ si avrebbe $S^k x \in B_n \subseteq E$ che contraddice la definizione di B_n. Dunque $\mu(B_n) = 0$. Ma allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme (misurabile) $C_n \subseteq E$ dato da $C_n = \{x \in E \,:\, \exists m > n\,,\, T^m x \in E\}$ soddisfa $\mu(C_n) = \mu(E)$. La tesi è ora provata perchè i punti dell'insieme $E_0 = \cap_{n \geq 1} C_n$ ritornano in E infinite volte e $\mu(E_0) = \mu(\cap_{n \geq 1} C_n) = \mu(E)$.

4 Altre conseguenze del Principio P

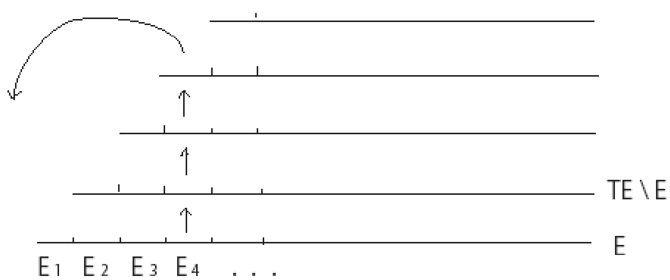
Definizione $R \subset \mathbb{N}$ si chiama insieme di ricorrenza se per ogni sistema dinamico $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ e $E \in \mathcal{B}$ con $\mu(E) > 0$ si può trovare $k \in R$ (e dunque infiniti $k \in R$) per cui $\mu(E \cap T^{-k}E) > 0$.

Esempio (Furstenberg, Weiss) È ricorrente ogni insieme IP: sequenza di interi (non necessariamente distinti) $p_1, p_2, p_3, \ldots$ insieme a tutte le loro somme con indici distinti, cioè del tipo $p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}$ con $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

Teorema (Hindman, 1974) In ogni partizione finita dell'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{N} = B_1 \cup \cdots \cup B_q$, uno degli insiemi B_i contiene un insieme IP.

5 Quanto tempo ci vuole?

Dato $E \subset X$ con $\mu(E) > 0$ gli insiemi $Q_1 = E$, $Q_2 = TE \setminus E$, $Q_3 = T^2E \setminus (E \cup TE)$ ..., formano una partizione numerabile di $I_E \subseteq X$, il più piccolo insieme T-invariante contenente E.



Il tempo di ricorrenza in E è la v.a. discreta $\tau_E : E \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ data da $\tau_E(x) = \inf\{n > 1 : T^n x \in E\}$ con insiemi di livello $E_n = \{x \in E : \tau_E(x) = n\}$.

Osservando che $\mu(Q_n) = \mu(\sum_{k \geq n} E_k)$ otteniamo

$$\mu(I_E) = \sum \mu(Q_n) = \sum k\, \mu(E_k) = \mu(\tau_E)$$

Teorema (Kac, 1947) *Il tempo di ricorrenza atteso in E è*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_X \tau_E(x) \mu(dx) = \frac{\mu(I_E)}{\mu(E)}$$

Se poi (X, μ, T) è ergodico, cioè tale che ogni sottoinsieme T-invariante ha misura nulla o misura piena, allora, essendo $\mu(E) > 0$ si ha $\mu(I_E) = 1$, e dunque

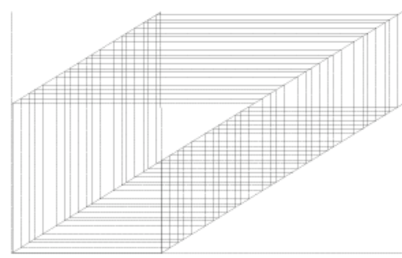
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_X \tau_E(x)\mu(dx) = \frac{1}{\mu(E)}$$

6 Un semplice esempio

Sia $X = [0, 1)$, μ la misura di Lebesgue su X e T la rotazione:

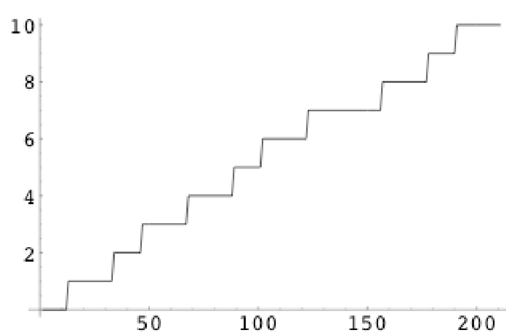
$$T : x \mapsto x + \alpha \ (mod\ 1)$$

Se $\alpha \in \mathbb{Q}$ tutte le orbite sono periodiche con lo stesso periodo. Se invece $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ allora tutte le orbite sono dense in $[0, 1)$, in particolare il sistema è ergodico.



Teorema delle tre differenze (congettura di Steinhaus) La successione dei tempi di ricorrenza $\tau_1, \tau_2, \ldots$ in un intervallo $E \subset X$ è tale che le differenze $\tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$ assumono solo tre possibili valori: q_1, q_2 e $q_1 + q_2$.

Esempio: per $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ e $E = [0, 1/20)$, troviamo $q_1 = 13$ e $q_2 = 21$.



7 Controversie

Il TRP si inserisce per ultimo nella serie di problemi di natura tecnica e concettuale che la teoria cinetica dei gas elaborata a partire dalla metà dell'800 da Clausius, Thomson, Maxwell, Boltzmann ed evolutasi successivamente nella meccanica statistica con Boltzmann e Gibbs, ha dovuto affrontare nel passaggio dalla descrizione microscopica e temporalmente simmetrica della dinamica molecolare per mezzo delle equazioni di Hamilton (o di Schrödinger) alla descrizione macroscopica e temporalmente asimmetrica di un gas in termini di equazioni idrodinamiche.

In una breve nota del 1893 lo stesso Poincaré osservò che la teoria cinetica era in contraddizione con il TRP. Passò praticamente inosservata fino a quando Zermelo (1871-1953), in *Über einen Satze der Dynamik und die mechanischen Wärmetheorie* (Annalen der Physik **57** (1896), 485-494) elaborò la sua *Wiederkehreinwand*.

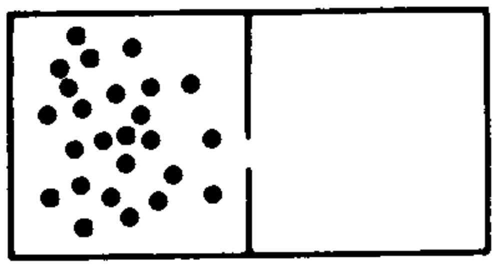
"Nel secondo capitolo della memoria vincitrice di Poincaré sul problema dei tre corpi è dimostrato un teorema da cui segue che l'usuale descrizione del moto termico delle molecole, sulla quale si basa per esempio la teoria cinetica dei gas, richiede importanti modifiche al fine di risultare consistente con la legge termodinamica dell'accrescimento dell'entropia (...) In un sistema di punti materiali soggetti a forze dipendenti solo dalla posizione (...) i processi irreversibili sono impossibili dal momento che (fatta eccezione per stati iniziali singolari) nessuna funzione univoca e continua delle variabili di stato, come l'entropia, può crescere indefinitamente: se si osserva una crescita finita, ci sarà necessariamente una corrispondente decrescita non appena lo stato iniziale ricorre."

8 Origini microscopiche del comportamento macroscopico irreversibile

Lo stato microscopico di un sistema classico di N punti materiali in un contenitore V è rappresentato da un punto x nello spazio delle fasi X di dimensione $6N$, $x = (\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N)$ dove $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{p}_i$ sono la posizione e il momento cinetico dell'i-esimo punto. L'evoluzione temporale è governata dalla dinamica Hamiltoniana che connette un microstato $x(t_0)$ ad un certo tempo t_0 con i microstati $x(t)$ a tutti gli altri tempi t, $-\infty < t < \infty$. Il volume degli insiemi in X si conserva durante l'evoluzione (teorema di Liouville).

Lo stato macroscopico M del sistema è invece una descrizione molto più grossolana, ottenuta ad esempio specificando l'energia totale e il numero di particelle in ciascuna delle due metà del contenitore. M è determinato da x, ma vi sono molti x che corrispondono allo stesso M. Sia X_M la regione dello spazio delle fasi X che consiste in tutti i microstati x che corrispondono al macrostato M e prendiamo come misura del "numero" di tali microstati il volume $\mu_M = \int_{X_M} \prod_{i=1}^{N} d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i$.

Consideriamo dunque la situazione in cui inizialmente il gas è confinato tutto nella metà di sinistra del contenitore.



Se all'istante t_a apriamo il setto, il volume dello spazio delle fasi accessibile al gas risulta enormemente accresciuto:

il rapporto tra i volumi accessibili dopo e prima l'apertura del setto è dell'ordine di 2^N.

Per 1 cm^3 di idrogeno alla temperatura $T = 0\ ^oC$ si ha $N \simeq 2,7 \cdot 10^{19}$ e dunque tale rapporto è un numero dell'ordine di

$$10^{10^{19}} \ldots \text{ uno seguito da dieci trilioni di zeri}$$

La nuova regione accessibile contiene quindi macrostati M corrispondenti a volumi μ_M molto grandi rispetto al volume dell'intero spazio delle fasi accessibile prima dell'apertura.

Il microstato $x(t)$ evolverà quindi con "grande probabilità" verso le nuove regioni accessibili e tale evoluzione corrisponde a una successione di macrostati M per la quale μ_M è crescente, in particolare è crescente l'entropia $S_B(x) = k \log \mu_M(x)$.

Questo processo continua finchè il sistema raggiunge il suo nuovo stato di equilibrio (senza confinamento) M_{eq} che corrisponde grosso modo a metà particelle in ciascuna metà del contenitore (con fluttuazioni "tipiche" dell'ordine di $\sqrt{N}$).

In questa situazione avremo $\mu_{M_{eq}}/|\Sigma_E| \simeq 1$, dove $|\Sigma_E|$ è il volume dell'intera regione dello spazio delle fasi accessibile con energia E.

Un'osservazione fondamentale di Boltzmann è che se $x \in M_{eq}$ allora $S_B(x)$ coincide (a meno di termini trascurabili con la taglia del sistema) con l'entropia termodinamica di Clausius e dunque fornisce una definizione microscopica di una proprietà estensiva definita macroscopicamente per sistemi all'equilibrio.

Estendendo tale definizione anche al sistema non in equilibrio, ne risulta una spiegazione dell'osservazione, contenuta nel secondo principio della termodinamica, che quando un vincolo (nella fattispecie il setto) viene rimosso, il sistema macroscopico isolato evolve verso stati con entropia più grande, cioè S_B "tipicamente" cresce così da "spiegare" e descrivere qualitativamente l'evoluzione verso l'equilibrio dei sistemi macroscopici.

9 Stima...

Che ne è della *Wiederkehreinwand*? È il TRP in contraddizione con questo quadro esplicativo?

Abbiamo visto che per il nostro contenitore con N particelle il rapporto tra i volumi accessibili dopo e prima l'apertura del setto è un numero dell'ordine di 2^N. Usando il teorema di Kac, possiamo stimare il tempo medio necessario al gas per tornare nella prima metà come $2^N \cdot \delta\tau$ dove $\delta\tau$ è il tempo necessario affinché un microstato tipico divenga distinguibile da se stesso entro il grado di precisione delle osservazioni. Un calcolo diretto utilizzando la costante di Planck come misura dell'indeterminazione nella misura di posizioni e momenti fornisce la stima $\delta\tau \simeq h/kT$ che a temperatura ambiente vale circa 10^{-14} secondi. Per 1 cm^3 di idrogeno il tempo di ricorrenza è dunque dell'ordine di $10^{-14}10^{10^{19}}$ secondi. L'età dell'universo, $\simeq 10^{17}$ secondi, è raggiunta con circa $N \simeq 100$. Viceversa, fissata una scala di tempi (ad es. la durata della vita umana), la probabilità che il tempo di ricorrenza sia minore è astronomicamente piccola.

10 ... e replica finale di Boltzmann a Zermelo (1897)

"L'applicabilità della teoria della probabilità ad una situazione particolare non può ovviamente essere provata matematicamente [...] ciò nonostante ogni compagnia di assicurazioni basa le sue previsioni sul calcolo delle probabilità [...] E in questo caso è ancora più valida per il numero enorme di molecole presenti un centimetro cubo di gas [...] L'assunzione che certe situazioni eccezionali non si osservino in natura non è dimostrabile in senso stretto (come non lo è l'applicabilità della stessa teoria meccanica) ma per quanto abbiamo detto è cosi' naturale che [...] mi risulta del tutto incomprensibile il fatto che qualcuno possa vedere una confutazione dell'applicabilità della teoria della probabilità nel semplice fatto che qualche altro argomento [il TRP] mostra che determinate eccezioni possono manifestarsi ora e poi tra un'eternità; quando poi la teoria della probabilità insegna esattamente la stessa cosa."