

Luca Peliti, Angelo Vulpiani

## Arrivano i frattali!

*Dai fiocchi di neve agli ammassi di galassie (passando per l'IBM), il concetto di frattali, dopo aver fatto una lunga anticamera, si sta rapidamente imponendo*

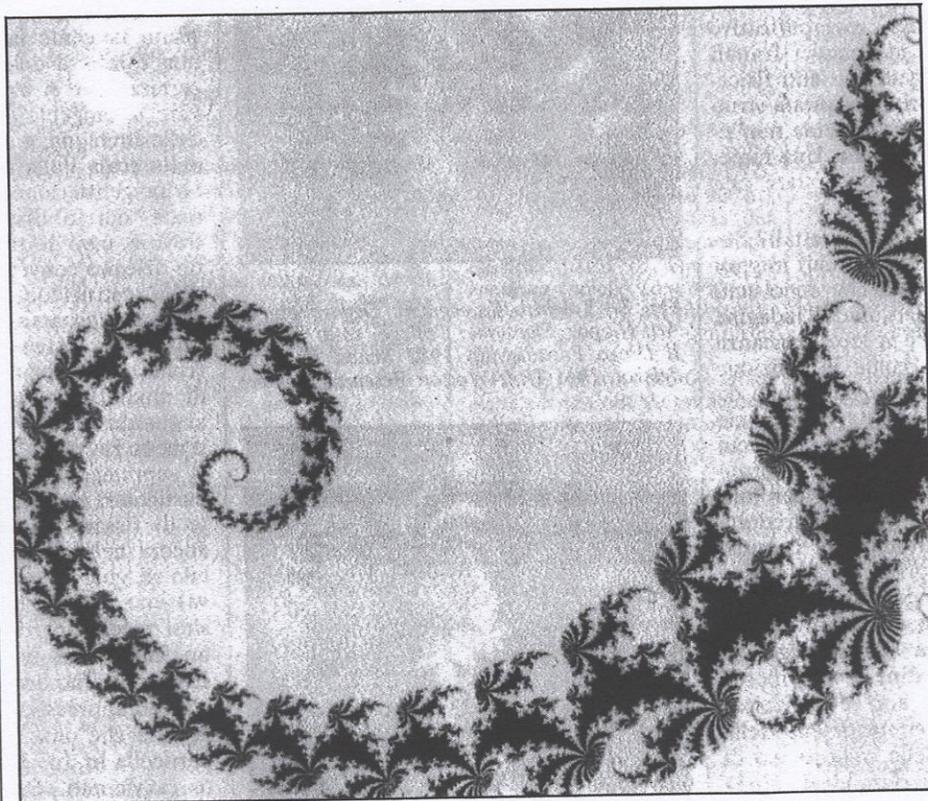


Fig. 1 Questa spirale, generata da geometria frattale, consiste di migliaia di piccoli elementi (© 1982 Mandelbrot, IBM Th.J. Watson Research Center)

*So, naturalists observe, a flea  
Hath smaller fleas that on him prey;  
And these have smaller fleas to bite'em;  
And so proceed ad infinitum.  
(J. Swift)*

**F**rattali: questa parola non esisteva ancora pochi anni fa; adesso capita di trovarla in articoli scientifici riguardanti gli argomenti più diversi. Il successo di questo termine è di misura rara per un termine scientifico: è dovuto a una pura moda? o al fatto che di esso si sentiva un'esigenza ancora inespressa? E questa parola «frattale», è un puro termine che copre realtà tra loro differenti? oppure esprime un concetto autentico, utile per

la nostra comprensione? Queste le domande a cui cercheremo di rispondere. Il termine «frattale» acquista diritto di cittadinanza con la pubblicazione, nel 1975, del libro *Les objets fractals*<sup>1</sup> da parte del matematico francese (americano di adozione) Benoit Mandelbrot. Il libro è abbastanza eterodosso come libro scientifico: come fa notare l'autore stesso «mescola deliberatamente diversi generi, oscilla tra volgarizzazione e monografia». Cosa rara per un testo di una scienza che «non esita a dimenticare i suoi padri», si conclude con degli schizzi biografici degli autori che hanno maggiormente contribuito all'emergenza dell'interesse per gli «oggetti frattali».

Inoltre, poiché lo scopo del libro è di attirare l'attenzione sulle somiglianze inaspettate che mostrano fenomeni normalmente considerati lontani l'uno dall'altro, esso si articola in un minimo di «testo» — in cui i concetti fondamentali vengono introdotti e resi via via più elastici e più ricchi — e in un massimo di digressioni, commenti, di «schede» esemplificative che mostrano oggetti matematici frattali che somigliano ad oggetti esistenti fisicamente. L'autore è costretto a questa struttura della natura (sostanzialmente non sistematica) del suo contributo. Una ragione analoga ci costringe ad adottare una struttura simile in questo articolo.

Che cosa sono questi oggetti frattali? Sono oggetti (naturali o matematici) in gran parte noti da tempo, ma che sono stati respinti per lo più ai margini dell'indagine fisica o matematica per la loro mancanza di «buone maniere»: come la funzione continua, priva di derivata, introdotta da Weierstrass («piaga lamentevole», come diceva il matematico Hermite, «da cui distolgo lo sguardo con orrore e disgusto»), come la curva che passa per tutti i punti di una regione piana, introdotta da Peano, la loro caratteristica comune è l'assenza di quelle proprietà di ordine e di armonia che ci aspetteremmo da oggetti matematicamente studiabili. Tradizionalmente si tende a cercare negli oggetti matematici un ordine o un'armonia superiore, e si considerano le deviazioni da quest'ordine come «impedimenti della materia». Così il modello matematico di una boccia di legno è la sfera ideale, liscia in ogni sua parte: e le irregolarità del legno vengono ascritte alla sua «imperfezione» e trattate come «errori». Anche quando si trattano processi con largo intervento del caso (processi stocastici), si tende a nascondere l'aspetto irregolare che ne è caratteristico, limitandosi a studiare quantità come la distribuzione di probabilità, la funzione di correlazione, ecc., che obbediscono a equazioni differenziali del solito tipo, hanno insomma la «liscezza» delle cose cui siamo abituati. Tuttavia nella nostra esperienza le cose lisce e regolari sono l'eccezione e non la regola; ed è interessante studiarne le irregolarità in se stesse, e non già soltanto difalcarle in quanto impedimenti della materia. Questo punto è sottolineato con forza già da J. Perrin, premio Nobel per la fisica, uno dei primi a investigare il moto browniano e a dimostrare quindi

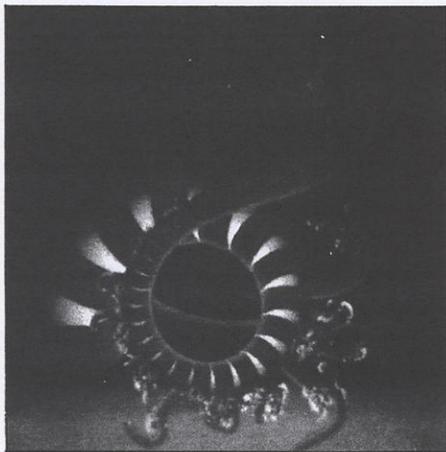


Fig. 2 Yoichiro Kawaguchi, Department of Art, Nippon Electronic College; sotto (fig. 3) Il Drago Frattale (© 1982 Benoit B. Mandelbrot, IBM Th.J. Watson Research Center)



sperimentalmente l'esistenza degli atomi<sup>2</sup>: «Osserviamo, ad esempio, uno di quei fiocchi bianchi che si ottengono salando dell'acqua saponata. Da lontano, il suo contorno può sembrare preciso, ma non appena ci si avvicina un po', questa precisione scompare. L'occhio non riesce a fissare alcuna tangente in un punto: una retta che si sarebbe portata a definire tale a prima vista, con un po' più di attenzione, sembrerà altrettanto bene perpendicolare o obliqua rispetto al contorno. Anche se si prende una lente di ingrandimento, un microscopio, l'incertezza rimarrà la stessa, poiché ogni volta che si aumenta l'ingrandimento si vedranno apparire delle nuove anfrattuosità, senza mai dare l'impressione precisa e riposante

che dà ad esempio una biglia di acciaio levigato, di modo che, se questa biglia dà una utile immagine della continuità classica, il nostro fiocco può altrettanto logicamente suggerire la nozione più generale delle funzioni continue senza derivata. E ciò che dobbiamo bene osservare è che l'incertezza sulla posizione del piano tangente in un punto della curva non è affatto dello stesso ordine dell'incertezza che si avrebbe se si volesse trovare la tangente di un punto del litorale della Bretagna, a seconda della grandezza della scala della carta usata per far ciò. La tangente cambierebbe a seconda della scala, ma in ogni caso se ne potrebbe trovare una. Il fatto è che la cartina è un disegno convenzionale, in cui, per via della costruzione stessa, ogni linea possiede una tangente. Al contrario, è una caratteristica essenziale del nostro fiocco (come del resto del litorale, se al posto di studiarlo su una carta geografica lo si guardasse dal vivo da una distanza più o meno ravvicinata) che, a qualsiasi scala, si suppongono, senza vederli affatto, dei particolari che impediscono assolutamente di fissare una tangente. Resteremmo ancora nel campo della realtà sperimentale se, guardando col microscopio, osservassimo il moto browniano agitare qualsiasi piccola particella in sospensione in un fluido. Per fissare una tangente alla sua traiettoria, dovremo trovare un limite almeno approssimativo alla direzione della retta che unisce le posizioni di questa particella in due momenti successivi molto ravvicinati. Ora, e se ne può avere diretta esperienza, questa direzione varia enormemente quando si faccia diminuire la durata di questi due momenti. In tal modo, ciò che questo studio suggerisce all'osservatore senza pregiudizi, sarà ancora la funzione senza derivata, e niente affatto la curva con tangente».

La natura discreta della materia fa sì che irregolarità come quella del fiocco di neve siano piuttosto la regola che l'eccezione in natura. Come dice ancora Perrin: «Riflettiamo, ad esempio, al modo con il quale si definisce la densità di un fluido comprimibile (per esempio l'aria), in un punto ed in un momento dato. Immaginiamo una sfera di volume  $v$  che abbia come centro questo punto, che contenga una massa  $m$  nel momento dato. Il quoziente  $m/v$  è la densità media nella sfera, e si intende per densità vera il valore limite di questo quoziente. Sarebbe come dire

Il moto browniano trae il suo nome dal medico inglese R. Brown che nel 1828, osservando al microscopio delle particelle di polline immerse in acqua, si accorse che esse erano animate da un moto incessante e irregolare. I tentativi di attribuire questo moto a qualche fenomeno biologico furono troncati dalla scoperta che anche particelle inanimate<sup>1</sup> mostravano lo stesso fenomeno. La spiegazione – intravista già da alcuni fra i «grandi» dell'800 – venne però formulata esplicitamente solo da A. Einstein<sup>2</sup>. Il moto browniano è per lui manifestazione a livello macroscopico dell'incessante agitazione termica cui sono soggette le molecole d'acqua. Supponiamo di immergere nell'acqua una pietra: essa sarà incessantemente sottoposta ad urti da parte delle innumerevoli molecole d'acqua che la circondano. Tuttavia questi urti avranno in generale, direzioni e intensità diverse, saranno talmente disordinati da essere incapaci, nel loro insieme, di fornire alla pietra una spinta apprezzabile. Supponiamo di ridurre le dimensioni della pietra, fino a darle una massa pari a quella di una molecola d'acqua. Allora essa dovrà essere animata dallo stesso moto di agitazione termico da cui queste sono animate. In una situazione intermedia, quando la massa della «pietra» è alquanto superiore a quella delle molecole d'acqua, ma è pur sempre microscopica, sarà lecito attendersi un fenomeno intermedio: gli urti a cui la particella è sottoposta non giungeranno fino a cancellarsi completamente; ne resterà un residuo, casuale, fluttuante, che tenderà a spingere la particella ora qua, ora là, in maniera estremamente erratica. Einstein ha mostrato come sia possibile calcolare – e mettere in relazione con caratteristiche macroscopiche del fluido e della particella – una quantità che descrive le proprietà statistiche del moto browniano: la media del quadrato della distanza dall'origine, in funzione del tempo  $t$  trascorso dall'inizio dell'osservazione. Ai nostri fini è sufficiente dire che, se la particella parte dall'origine al tempo  $t=0$ , e  $\bar{r}(t)$  è la sua posizione al tempo  $t$ , allora  $r^2(t)$  è pro-

### Moto browniano

porzionale, in media, al tempo  $t$  trascorso.

Questo risultato spiega l'origine delle difficoltà trovate dai fisici ottocenteschi per elaborare una teoria del moto browniano: non è possibile descrivere il moto browniano mediante equazioni differenziali ordinarie, come si era abituati a fare in meccanica fin dai tempi di Newton. E ciò perché il moto browniano *non possiede una velocità*. Se avesse una velocità, infatti, per piccoli intervalli di tempo  $\Delta t$ ,  $\Delta \bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$ , cioè la distanza percorsa nel tempo  $\Delta t$ , dovrebbe essere proporzionale a  $\Delta t$  stesso:

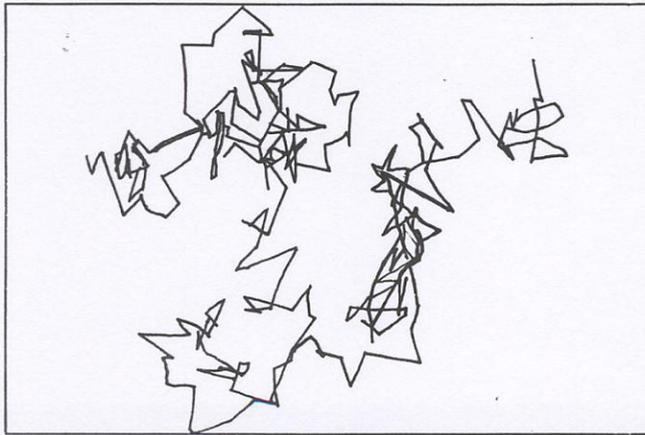
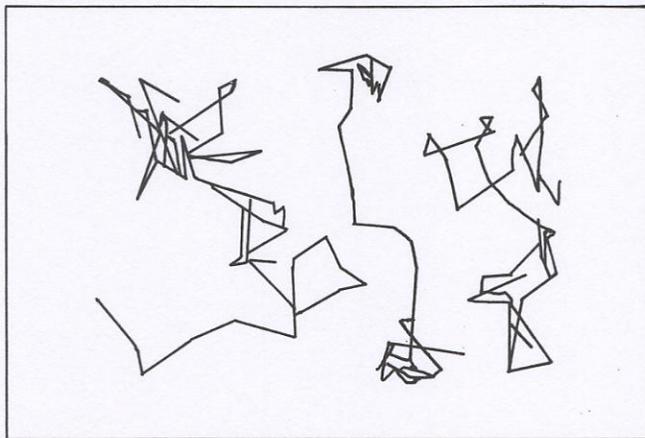
$$\begin{aligned} \Delta \bar{r} &= \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) \approx \frac{d\bar{r}}{dt} \Delta t = \bar{v} \Delta t \\ &= \Delta t = \bar{v} \Delta t \end{aligned}$$

Ma dalla teoria di Einstein (confermata dalle osservazioni) segue che non  $\Delta \bar{r}$ , ma il suo *quadrato* è proporzionale a  $\Delta t$  (in media):

$$\langle (\Delta \bar{r})^2 \rangle \sim \Delta t$$

C'è quindi da aspettarsi praticamente sempre che la velocità del moto browniano (intesa come limite del rapporto  $\Delta \bar{r}/\Delta t$ ) non esista. La traiettoria del moto browniano è quindi un esempio fisico di una curva *continua* (poiché comunque  $\Delta \bar{r}$  tende a zero con  $\Delta t$ ) ma sprovvista di tangente in ogni suo punto.

J. Perrin nel suo libro *Gli atomi* attira l'attenzione su un aspetto importante delle traiettorie del moto browniano: ciò che avvie-



ne in ogni intervallo di tempo è un'immagine in piccolo della traiettoria nel suo complesso. Nella fig. A si vede l'immagine delle posizioni successive assunte da una particella che compie un moto browniano, prese con un certo intervallo di tempo. Nella fig. B si vede un'analoga immagine, presa però con intervalli di tempo 100 volte più piccoli. La somiglianza fra le due figure è evidente. Potremmo immaginare di scoprire, disegnando le posizioni della particella a intervalli sempre più piccoli, sempre nuove angolosità, mentre la lunghezza totale del cammino percorso cresce oltre ogni limite... È possibile vedere infatti che, poichè ad ogni intervallo di osservazione  $\Delta t$  corrisponde una lunghezza di ciascun «passo»  $\Delta l \sim (\Delta t)^{1/2}$  e la lunghezza totale di un cammino di durata  $T$  è pari a  $(T/\Delta t) \Delta l \sim T/\Delta t$ , che la lunghezza totale della traiettoria del moto browniano, stimata con «passi» di lunghezza  $\Delta l$ , cresce come  $\Delta t^{-1}$ . In termini di dimensione di Hausdorff (vedi la prossima scheda) la dimensione del moto browniano è  $D=2$ .

Il moto browniano, oltre a essere all'origine della prima «dimostrazione sperimentale» dell'esistenza degli atomi, è stato assunto come paradigma per l'evoluzione di quantità termodinamiche o microscopiche di sistemi prossimi all'equilibrio termodinamico. Su di esso sono stati affinati strumenti matematici (integrale di Wiener, equazioni differenziali stocastiche) che sono stati poi applicati allo studio delle proprietà dinamiche dei sistemi termodinamici, ai sistemi di equilibrio, e che sono fra le tecniche più usate attualmente per la comprensione di fenomeni aleatori che si sviluppano nel tempo.

<sup>1</sup> NELSON E., *Dynamical theories of Brownian Motion*, Princeton, 1967.

<sup>2</sup> EINSTEIN A., *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, Dover, New York, 1956.

che nell'istante dato la densità media nella piccola sfera è praticamente costante al di sotto di un certo valore del volume. E, effettivamente, questa densità media, che può essere ancora notevolmente diversa per sfere di  $1.000 \text{ m}^3$  e di  $1 \text{ cm}^3$ , non varia più di un milionesimo quando si passa dal centimetro cubo al millesimo cubo. Tuttavia, persino entro tali limiti di volume (il cui scarto, del resto, dipende molto dalle condizioni di agitazione del fluido), si producono irregolarmente delle variazioni dell'ordine del milionesimo.

Continuiamo a diminuire il volume. Queste fluttuazioni, lungi dal diventare sempre meno importanti, saranno sempre più grandi e disordinate. Alle dimensioni in cui il moto browniano si rivela molto attivo, mettiamo ad un decimo di micron cubo, esse cominciano (nell'aria) a raggiungere il millesimo e sono del quinto quando il raggio della sferetta immaginata diventa dell'ordine del centesimo di micron.

Ancora un salto: questo raggio diventa dell'ordine del raggio molecolare. Allora in generale (almeno per un gas), la nostra sferetta si trova completamente nel vuoto molecolare, e la densità media si ridurrà ormai ad essere nulla: la densità vera è nulla al punto che ci è stato dato. Ma forse una volta su mille questo punto si sarà trovato all'interno di una molecola, e la densità media sarà allora paragonabile a quella dell'acqua, cioè mille volte superiore a ciò che correntemente si designa come la densità vera del gas.

Considerazioni di questo tipo emergono di tanto in tanto nelle opere di diversi scienziati di questo secolo, che si occupano di ricerche nei campi più disparati: meteorologia, geofisica, sismografia, astrofisica, teoria della comunicazione, ecc. Tuttavia fino a poco tempo fa queste considerazioni avevano scarsa risonanza, quando non incontravano addirittura un'ostilità manifesta: e molti tra coloro che le proponevano erano accomunati dall'essere ai margini della comunità scientifica, occupandosi di argomenti eterodossi come «La teoria matematica della speculazione (in borsa)» (Bachelier)<sup>3</sup>, «Comportamento umano e principio di minimo sforzo» (Zipf)<sup>4</sup>, psicologia dei conflitti armati fra Stati (Richardson)<sup>5</sup>. Il riflesso condizionato degli scienziati «normali», quando si imbattevano in oggetti di questo tipo, era o di respingerli come «mostrosità» o di cercare una descrizione

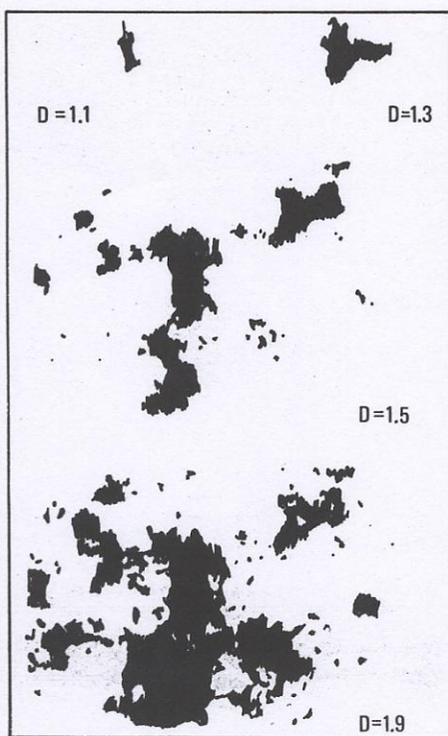


Fig. 4 Risultato di un programma di calcolatore che simula i profili di costa di continenti immaginari

che ne nascondesse in qualche modo il carattere irregolare e permettesse di trattarli con gli strumenti collaudati dell'analisi matematica.

A questo punto interviene Mandelbrot, dà un nome al concetto, e presenta diversi esempi di oggetti frattali, mostrando come essi possano essere descritti come dotati di dimensione non intera. In realtà si tratta non della dimensione a cui siamo abituati a pensare, ma di una delle possibili generalizzazioni di tale concetto: la dimensione di Hausdorff (vedi scheda).

Un oggetto ha dimensione di Hausdorff  $D$  se il numero di sfere di raggio  $r$  necessarie per «coprirlo» è proporzionale (quando  $r$  è abbastanza piccolo) a  $r^{-D}$ . È evidente in tale definizione che  $D=1$  per una linea liscia,  $D=2$  per una superficie liscia. Si può dire che la differenza tra  $D$  e la dimensione «standard» è una misura del grado di frastagliamento dell'oggetto. Ad esempio la curva di Peano (una curva continua che passa in vicinanza di ogni punto del piano) ha chiaramente

$D=2$  e dimensione standard 1. Questo suggerimento di Mandelbrot diventa rapidamente di moda. Come mai un concetto in fondo non troppo peregrino è dovuto stare così a lungo in anticamera, e a che cosa è dovuto il suo successivo rapido imporsi?

Abbiamo detto che per la descrizione di oggetti come il moto browniano, la curva di Von Kock (vedi scheda 2), ecc. l'analisi «tradizionale» è impotente. Tuttavia, ci si può cercare di limitare a un livello più grossolano di descrizione. Per molto tempo il livello di descrizione qualitativo era considerato con disprezzo (è tipico il detto di Rutherford «qualitativo è nient'altro che quantitativo malfatto») e neanche agli strumenti matematici per un'analisi qualitativa erano disponibili. È caratteristica dell'evoluzione recente, invece, l'attenzione agli aspetti qualitativi dei problemi, che si accompagna allo sviluppo di opportuni strumenti matematici (ne è una testimonianza la popolarità riscossa dalla «teoria delle catastrofi»). Diventa di conseguenza interessante e possibile studiare per es. del moto browniano non solo *quantità* come la distanza percorsa (in media) in un dato tempo, ma anche *qualità* come il grado di angolosità, la maniera con cui una breve porzione del cammino costituisce l'immagine ridotta del cammino stesso. L'oggetto concreto, nella sua irregolarità, può essere tirato fuori dal suo nascondiglio ed osservato.

A questo si accompagna l'uso sistematico del calcolatore. Non ci si limita più ad osservare, e a trarre dai dati empirici la dimensione di Hausdorff di una linea di costa o del reticolo polmonare. Ci si domanda che aspetto possono avere oggetti di dimensione di Hausdorff data, non costruiti in modo regolare (come la curva di Von Koch), ma con quell'apporto di casualità che è caratteristico degli oggetti naturali. Per fare questo, il calcolatore è indispensabile. Non per nulla il libro di Mandelbrot è anche (non troppo fra le righe) una pubblicità all'IBM dove egli lavora. Ma solo con il calcolatore è possibile agire separatamente sugli aspetti deterministici (per esempio nella dimensione) e aleatori.

Per esempio osserviamo nella fig. 4 il risultato di un programma di calcolatore che simula i profili di costa di continenti immaginari. In questo programma è possibile scegliere arbitrariamente la dimensione di Hausdorff  $D$  della costa; inoltre

Perché si dice che una curva ha dimensione uno e una superficie ha dimensione due? Esistono diverse risposte possibili a queste domande, che conducono ciascuna a una diversa possibile generalizzazione del concetto di dimensione. Possiamo per esempio notare che una curva può essere posta in corrispondenza biunivoca e continua con un intervallo della retta reale, cioè che ad ogni punto della curva si può far corrispondere un numero reale e viceversa, in modo che muovendosi poco sulla curva questo numero vari di poco. D'altra parte, per ottenere una corrispondenza continua, una superficie deve essere posta in corrispondenza con una coppia di numeri reali: per es., per identificare un punto sulla superficie terrestre, sono necessarie due coordinate: la longitudine e la latitudine. Poiché il concetto di corrispondenza biunivoca e continua è alla base della disciplina matematica detta *topologia*, si dice che questa interpretazione del concetto di dimensione è una interpretazione topologica. Si parla di *dimensione topologica*, e delle relative generalizzazioni, per es., agli spazi topologici di funzioni (spazi di Hilbert) con dimensione infinita, ecc. Il concetto di dimensione di Hausdorff trova invece la sua origine nel procedimento di misura delle grandezze: si parla quindi di *dimensione metrica*. Per comprenderne l'origine, consideriamo la differenza esistente nel procedimento di misura di una curva e di una figura piana. Nel primo caso si cerca di approssimare la curva mediante una spezzata composta di segmenti di lunghezza  $l$ ; la lunghezza totale della spezzata sarà  $L(l) = N_l \times l$  dove  $N_l$  è il numero totale di elementi della spezzata. Dimezziamo ora la lunghezza dei segmenti: otterremo  $L(l/2) = N_{l/2} \times (l/2)$ . Quanto più la lunghezza  $l$  dei segmenti diventa piccola, tanto più il loro numero diventa grande; ma il prodotto di queste due quantità tende a una costante, che è appunto la lunghezza del tratto di curva. Otteniamo così che il numero di

### Dimensione di Hausdorff

elementi di estensione lineare  $l$  necessari a coprire una curva è (approssimativamente) inversamente proporzionale a  $l$  alla prima potenza:

$$N_l \sim \text{cost.}/l$$

Nel caso di una figura piana, invece, se cerchiamo di ricoprirla con quadrati di lato  $l$ , ci accorgiamo che il numero  $N_l$  di quadrati necessari aumenta inversamente al quadrato di  $l$ :

$$N_l \sim \text{cost.}/l^2$$

Analogamente, per una figura solida, il numero di cubetti di spigolo  $l$  necessari per ricoprirla, aumenta in modo inversamente proporzionale al cubo di  $l$ . Vediamo così che la curva (unidimensionale) è caratterizzata dall'esponente uno, la superficie dall'esponente due, il solido dall'esponente tre. Queste considerazioni conducono ad un'altra generalizzazione

Questa curva è nota sotto il nome di curva di Von Koch.

La dimensione *topologica* di questo oggetto è uno (anche se è un po' difficile trovare effettivamente una corrispondenza fra punti di questa «curva» e numeri reali). Invece è facile vedere che la sua dimensione *metrica* è maggiore di uno. Ad ogni stadio del processo, infatti, otteniamo una spezzata composta di elementi di lunghezza  $1/3^n$  in numero di  $4^n$ . Otteniamo così:

$$N_l = 4^n$$

dove  $l = 1/3^n$ .

È facile vedere che

$$N_l = 4^n = e^{n \ln 4} = 3^{n \ln 4 / \ln 3} = (1/3^n)^{-\ln 4 / \ln 3} = 1/l^D$$

dove

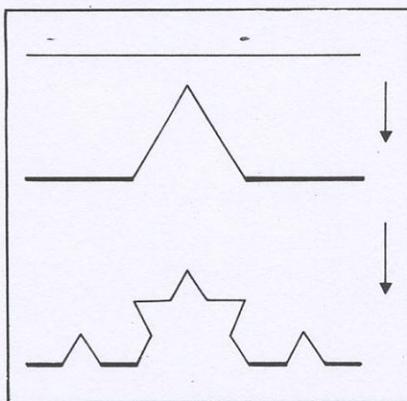
$$D = \ln 4 / \ln 3$$

Il numero  $D$  così ottenuto è la

ogni passo del procedimento è costituito da  $2^n$  segmenti separati fra loro, ciascuno di lunghezza  $1/3^n$ . Otteniamo così per questo insieme:

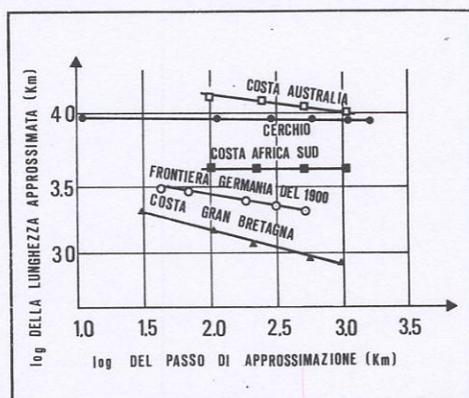
$$D = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309.$$

Uno dei vantaggi del concetto di dimensione di Hausdorff è la possibilità che esso introduce di considerare la dimensione come una quantità sperimentalmente misurabile. Per misurare per esempio la dimensione di Hausdorff di una linea di costa è sufficiente riportare su un grafico il logaritmo della lunghezza totale della costa approssimata come una spezzata costituita da segmenti di lunghezza  $l$  in funzione del logaritmo di  $l$ . La pendenza della curva così ottenuta dà  $D-1$ . Questo metodo è facile da generalizzare al caso di superficie ecc. In figura D è riportata una serie di questi grafici (tratta da Mandelbrot, 1975) dovuta a Richardson<sup>1</sup> che è stato il primo a pensare che la dimensione di



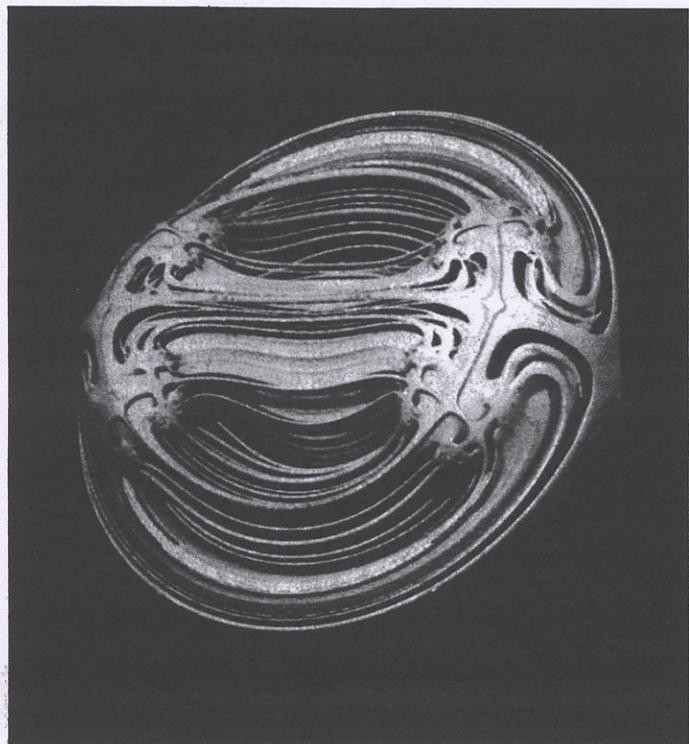
possibile del concetto di dimensione, che apre la possibilità a dimensioni non intere. Consideriamo l'oggetto la cui costruzione è suggerita in fig. C. Si prende un segmento di lunghezza, per esempio, unitaria. Si rimuove il terzo più interno del segmento e lo si sostituisce con due segmenti, ciascuno di lunghezza pari ad un terzo del segmento originale. Si ripete l'operazione su ciascuno dei quattro segmenti così ottenuti, e così via, all'infinito.

*dimensione di Hausdorff* della curva di Von Koch. Altri oggetti matematici, con dimensioni differenti, possono essere costruiti, uno di questi, assai famoso fra gli studenti dei primi anni di fisica o matematica, è l'insieme di Cantor: che è l'insieme costituito dai punti della curva di Von Koch che appartengono anche al segmento originale (a tratto forte in figura). Questo è un insieme di punti isolati fra loro (ha quindi dimensione topologica zero). Ad



un oggetto fisico potesse essere trattata alla stregua di una quantità fisica, misurabile, come le altre.

<sup>1</sup> RICHARDSON, L.F., in *General Systems Yearbook*, 6, 1961, 139.



Figg. 5-6 Da Alan Norton, Generation and Display of Geometrie Fractals in 3-D (© 1982, Association for Computing Machinery, Inc.)

esso contiene una componente aleatoria, che è ottenuta tramite un sottoprogramma opportuno. A questo punto siamo invitati da Mandelbrot a scegliere quale tra queste figure si avvicina di più all'immagine di una costa reale. Il problema è di garantire che la differenza di aspetto fra le diverse figure sia *tutta* dovuta alla differenza di  $D$  e non al fatto che diverse realizzazioni del programma sono diverse casualmente fra loro (anche se hanno lo stesso  $D$ ). In un esperimento reale questo è ovviamente impossibile a farsi. Il calcolatore offre però maggiori possibilità. Infatti il sottoprogramma che genera i numeri «a caso» che sono la componente aleatoria del programma principale, è in realtà un programma *deterministico* che opera su un certo dato iniziale (il «seme»). Se a questo programma diamo due volte lo stesso «seme», esso genererà la stessa lista di numeri «a caso». In questo modo la componente aleatoria del processo è completamente sotto controllo. E ora, quale delle figure si avvicina di più all'aspetto di una costa autentica? Molti so-

no orientati a scegliere  $D=1.3$  il che è più o meno in accordo con le stime di Richardson<sup>6</sup> in fig. D.

Mandelbrot tenta di estendere l'applicabilità dei suoi concetti anche a fenomeni estranei alla matematica e alla fisica (organizzazione dei calcolatori, frequenze di utilizzazione delle parole, distribuzione dei redditi in un «universo di Pareto»). Questi tentativi sono alquanto superficiali, ed è ovvio che l'autore stesso non li prenda molto sul serio. Egli tende però a passare in secondo piano (pur riconoscendola) quella che è la sostanziale limitazione del suo approccio. Il contributo di Mandelbrot non è una «teoria» dei frattali. Egli ha il merito di aver richiamato l'attenzione sui frattali e di aver dato loro un nome; dopo di che ne ha mostrato vari esempi, costruiti esplicitamente in modo da somigliare a oggetti naturali. Quello che egli si propone di fare (e che non ha ancora completamente fatto) è al più di fare una *geometria* dei frattali: una descrizione per quanto possibile completa degli oggetti che hanno

una data dimensione di Hausdorff  $D$ . Questo è molto interessante, perché fenomeni che hanno le caratteristiche di un frattale – struttura self-similare e un certo grado di frastagliatezza – non sono rari. Tuttavia egli si arresta – si deve arrestare – al livello *descrittivo*. In particolare la dimensione  $D$  è un parametro che deve essere messo dall'esterno: solo una teoria più profonda, una *dinamica*, (che è in gran parte ancora di là da venire), sarebbe in grado di spiegare per esempio perché le coste hanno  $D \sim 1.3$  o la struttura gerarchizzata delle galassie (vedi scheda) sembra avere  $D \sim 1.2$ .

È chiaro che diventa più facile *porsi* queste domande ora che Mandelbrot ha dato diritto di cittadinanza ai frattali. Ma le risposte saranno da cercarsi altrove.

Tuttavia c'è stato anche qualche contributo *diretto* della teoria dei frattali: l'ipotesi che un qualche oggetto fisico abbia una determinata dimensione  $D$  permette a volte di collegare fra loro le potenze caratteristiche con cui si comportano certi fenomeni. Si fa strada, per esempio, nella

### Frattali in astrofisica

I frattali in astrofisica hanno avuto discreti successi nella descrizione della distribuzione spaziale di oggetti quali stelle, galassie, cluster di galassie, ecc. In questa scheda discuteremo brevemente due esempi di tali applicazioni; la soluzione (alternativa al modello di universo in espansione) del paradosso di Olbers<sup>1</sup> ed un modello frattale per la distribuzione di galassie. Il paradosso di Olbers, formulato quasi due secoli fa, è il seguente: se si assume che nell'universo (statico) la distribuzione di masse (stelle) è uniforme (su scale abbastanza grandi) allora l'intensità luminosa in un qualunque punto è infinita.

Si ha infatti che il numero di stelle con distanza tra  $R$  ed  $R+dR$  dal punto prescelto è proporzionale a  $R^2 dR$ , il contributo di luminosità di ogni stella è proporzionale a  $R^{-2}$  quindi abbiamo che l'intensità luminosa dovuta a stelle tra  $R$  ed  $R+dR$ , è proporzionale a  $dR$ , integrando si ha una luminosità infinita. La soluzione del paradosso di Olbers viene dalla teoria dell'universo in espansione: stelle lontane, poiché si allontanano più velocemente, emettono su lunghezza d'onda via via

più grandi (red shift): così l'intensità della luce emessa su ogni frequenza finita tende ad un limite finito.

Tale spiegazione è quella da tutti accettata. Mostriamo però (solo a livello didattico, non vogliamo certo mettere in discussione la teoria dell'universo in espansione!) come si può avere una spiegazione alternativa in un universo statico se si fa l'ipotesi che le stelle siano uniformemente distribuite in zone a dimensione fratta  $D < 2$  e se il punto di osservazione fa parte di una di queste zone.

Dalla definizione di dimensione di Hausdorff si deduce facilmente che la massa  $M(R)$  contenuta in una sfera di raggio  $R$  centrata in un punto «vicino» ad una stella è proporzionale ad  $R^{-D}$ . La massa  $M$  di un oggetto frattale è chiaramente data da  $M = N(R) M(R)$  dove  $N(R)$  è il numero di sfere di raggio  $R$ , poiché  $N(R) \sim R^{-D}$  si ha  $M(R) \sim R^D$ .

Il numero di stelle a distanza tra  $R$  ed  $R+dR$  è proporzionale ad  $R^{D-1}$  l'intensità luminosa per stella è  $\propto R^{-2}$  quindi il con-

tributo di luminosità dovuto alle stelle tra  $R$  ed  $R+dR$  è  $\propto R^{D-3} dR$ . Abbiamo quindi, integrando che la luminosità è finita se  $D < 2$ . Notare che la relazione  $M(R) \sim R^D$  con  $D \sim 1.2$  è stata osservata sperimentalmente da Vaucouleurs nel 1970<sup>2</sup> (prima quindi dell'introduzione dei frattali).

L'altra applicazione che vogliamo brevemente analizzare è un modello frattale col quale si riesce a riprodurre in modo molto accurato le funzioni di correlazione misurate sperimentalmente. Un primo modello di tale tipo fu già proposto dallo stesso Mandelbrot; noi ne illustreremo uno proposto da Peebles<sup>3</sup>.

L'idea dalla quale nasce è sostanzialmente una modifica (che tenga conto della «frattalità») di una vecchia idea di Hoyle: le galassie (ammassi, cluster, ecc.) nascono per frammentazioni successive. Un enorme ammasso si frammenta in ammassi più piccoli i quali a loro volta si frammentano ancora, ecc., il parametro rilevante di tale modello (una volta fissato il numero di ammassi che nascono da un ammasso più grande ad ogni step di frammentazione) è il rapporto tra le dimensioni lineari dell'ammasso «figlio» e di quello «madre».

Il modello è costruito ponendo una grande sbarra immaginaria in una posizione casuale rispetto all'osservatore e con un'orientazione anch'essa casuale. Agli estremi sono attaccate sbarre più piccole (di un fattore  $a < 1$ ) anch'esse con orientamento casuale, poi si attaccano sbarre più piccole (ad ogni livello le sbarre si accorciano di un fattore  $a$ ). Quando il numero dei livelli desiderati è completato (la lunghezza delle sbarre più piccole è fissata con considerazioni sperimentali-fenomenologiche) si attaccano le galassie agli estremi delle sbarre più piccole e si proiettano le posizioni delle galassie sul cielo dell'osservatore. Tutta la

costruzione descritta (per un ammasso, deve essere ripetuta poi un migliaio di volte) e l'elaborazione statistica è naturalmente effettuata con l'ausilio del computer. Notare che tale modello dà una struttura frattale e gerarchizzata per la distribuzione delle galassie, la dimensione fratta  $D$  è legata ad

$$a \text{ dalla relazione } D = - \frac{\lg 2}{\lg a}, \text{ il}$$

valore di  $a$  che meglio riproduce i dati sperimentali è  $a = .57$  corrispondente a  $D \approx 1.2$  in accordo con le osservazioni già citate di Vaucouleurs.

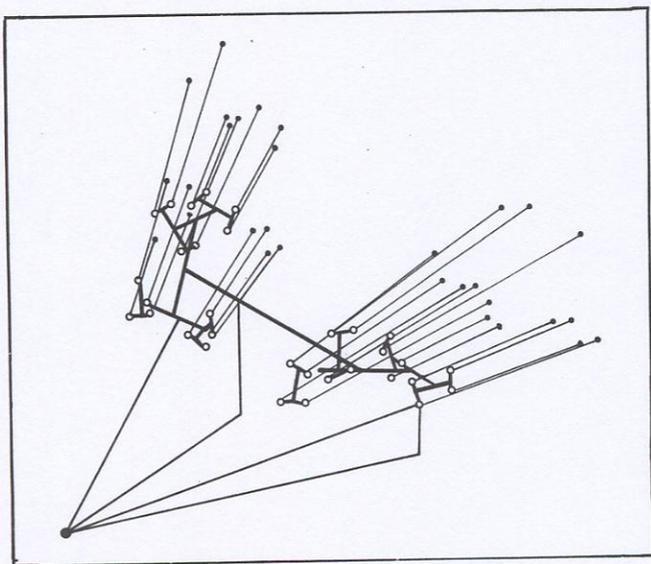


Fig. F Schema di costruzione del modello di Peebles. Da (3)

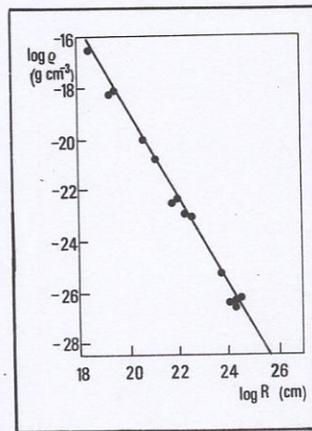


Fig. E Densità media di materia in una sfera di raggio  $R$ , in funzione di  $R$ . Da (2)

teoria del moto turbolento dei fluidi<sup>7</sup> l'idea che questo moto sia in realtà assai regolare, tranne che in una regione dello spazio con  $D < 3$  che costituisce un insieme frattale - in cui sono localizzate le grandi variazioni di velocità.

«Forse nell'atmosfera si aggira un orribile oggetto frattale che ancora non riusciamo a vedere perché gli sperimentali non hanno ancora trovato il modo di visualizzare gradienti di velocità» (U. Frisch, 1979, in ref. 7).

Analogamente è possibile interpretare certe proprietà del punto critico dei fluidi costruendo un modello in cui il fluido è costituito di goccioline, la cui superficie è un oggetto frattale di dimensione  $D > 2$ <sup>8</sup>.

La «moda» dei frattali è un'espressione di una situazione in cui la scienza tende a divenire spettacolo. Il rumore prodotto dall'intervento di Mandelbrot è senza altro assai superiore alla sua importanza relativa, e ad esso non è estraneo il desiderio dell'IBM di sfruttarlo ai propri fini. Contrasta con questo rumore l'atteggiamento assai ragionevole di Mandelbrot, al di là della sua indubbia capacità pubblicitaria, che non ha mai sopravvalutato il suo contributo. Gli dobbiamo riconoscere di avere ricordato con forza che «il reale è una nuvola polverosa, di cui la scienza classica e la tecnologia hanno descritto solo simulacri, definiti e terminati, normalizzati e purificati»<sup>9</sup>.

NOTE

<sup>1</sup> MANDELBROT B., *Les objets fractals; forme, hasard et dimension*, Flammarion, Paris, 1975.

MANDELBROT B., *Fractals; Form, Chance and Dimension* Freeman, San Francisco, 1977.

<sup>2</sup> Perrin J., *Gli atomi*, Editori Riuniti, Roma, 1981.

<sup>3</sup> BACHELIER L., *Théorie de la Spéculation*, Annales de l'ENS, III-17, 1900, 21.

<sup>4</sup> ZIPF G.K., *Human Behaviour and the Principle of Least Effort*, An Introduction to Human Ecology, Addison Wesley, 1949.

<sup>5</sup> RICHARDSON L.F., in *Nature* 135, 1935, 830; 136, 1935, 1025; 158, 1946, 135.

<sup>6</sup> RICHARDSON L.F., in *General Systems Yearbook* 6, 1961, 139.

<sup>7</sup> FRISCH U., SULEM P., NELKIN M., in *Journal Fluid Mechanics*, 87, 1978, 719.

MANDELBROT B., in *Comptes Rendus Ac. Sci.*, Paris, 282A, 1976, 119.

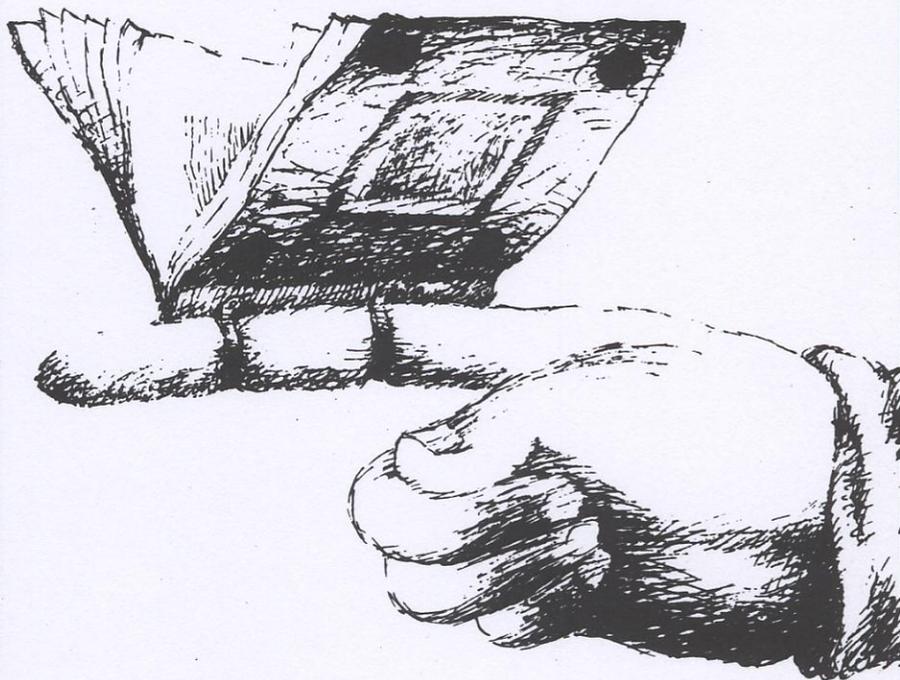
FRISCH U., in *Problemi di una politica della scienza*, Camerino (1979).

<sup>8</sup> FISHER M.E., in *Physics*, 3, 1967, 255.

<sup>9</sup> PORRO M., *il manifesto*, 4 aprile 1982.

# L'INDICE

DEI LIBRI DEL MESE



## L'unico mensile italiano di recensioni librarie

*Recensioni, schede, segnalazioni,  
recuperi, libri di testo, traduzioni:  
parlando solo di libri  
l'Indice parla di tutto.*

**Abbonamento annuale (10 numeri): lire 35.000,  
da versare sul c/c postale n. 78826005,  
intestato a L'Indice dei libri del mese**