P. e T. Ehrenfest 1906

Su un problema del calcolo delle probabilità connesso con l'interpretazione cinetica dell'aumento di entropia

Senza stare a discutere in primo luogo la connessione di cui è fatta menzione nel titolo (1), rivolgiamoci immediatamente al problema particolare. Siano date N palline (p.e. 100). Per distinguere l'una dall'altra, siano esse numerate progressivamente da 1 a N. Siano momentaneamente separate in due urne, in modo che l'urna A ne contenga P_0 (p.e. 90) e l'urna B $Q_0 = N - P_0$ (dunque 10). Inoltre non sia noto quali particolari palline giacciano in A e quali in B . Si trovino inoltre in un sacco N biglietti da lotteria, numerati da 1 a N. Ogni dieci secondi viene estratto un biglietto, viene letto il numero, quindi il biglietto viene rimesso a posto e si mischia per bene. Poi se ne estrae un altro, si legge il numero etc. Ogni volta che viene letto un numero, la pallina che porta questo numero salta dall'urna in cui si trova nell'altra, e ci rimane finchè non viene estratto il suo numero un'altra volta. Si vede che è sempre più probabile che la pallina appena chiamata si trovi nell'urna più piena anzichè in quella più vuota. Dunque finchè l'urna A è molto più piena della B, a seguito della maggior parte delle successive estrazioni sarà l'urna A a vuotarsi nell'urna B, e solo raramente essa riceverà una pallina dall'urna B.

Per chiarire: su un foglio di carta millimetrata corrisponda sulle ascisse ad ogni millimetro il passaggio dall' r-esima all' r + 1-esima estrazione. In corrispondenza dell' r-esimo punto tracciamo come ordinata

$$y_r = |P_r - Q_r| \qquad\qquad y_0 = |P_0 - Q_0|.$$

P_r e Q_r indicano i contenuti delle urne dopo la r -esima estrazione, $|P_r - Q_r|$ il valore assoluto (2) della loro differenza. Si ottiene così una successione di punti che per comodità possiamo pensare collegati da una poligonale. Sia il primo punto relativamente molto alto, $y_0 = 80$. Ogni punto di questa successione si trova sempre due unità più in basso o due unità più in alto del precedente. Una terza possibilità è esclusa. Se y_r ha ancora un valore molto alto, y_{r+1} si troverà di solito più in basso (3); la "curva" mostra così all'inizio una decisa tendenza a scendere, e solo qua e là risale di uno o di alcuni tratti. Solo quando è già scesa molto (i contenuti delle urne non sono più molto diversi) queste estrazioni "sbagliate" capitano più spesso: la tendenza verso il basso diventa più debole. Alla fine la curva corre vicina all'asse dello zero, mentre ora l'una ora l'altra urna si riempie un po' di più. Resterà ora per tutto il futuro prossima allo zero? No. Immaginiamo che le estrazioni si protraggano enormemente a lungo. La successione di una serie di estrazioni tale da condurre nuovamente ad una differenza notevole o addirittura molto grande sarà molto rara. Ma perchè le estrazioni ogni tanto raccolgano tutte le 100 palline in B la probabilità è solo molto piccola, ma non nulla. (Se ne può facilmente calcolare il valore). Se si prosegue nelle estrazioni abbastanza a lungo, diventa estremamente improbabile che questi alti o eccezionali "picchi" permangano nella curva, abbastanza prolungata. Tanto basta. La curva delle estrazioni sia proseguita abbastanza a lungo perchè anche i picchi più rari ricorrano un paio di migliaia di volte. La curva correrà allora per lo più molto vicina allo zero, innalzandosi solo raramente in modo apprezzabile e ancora più di rado assumendo valori elevati.

Ogni volta che, nel seguito delle estrazioni si trovano nuovamente 80 palline di più in un'urna che nell'altra siamo naturalmente portati a scommettere che la differenza, con

la prossima estrazione, scenderà a 78. Infatti è nove volte più probabile che la prossima pallina ad essere chiamata sia una delle 90 palline dell'urna più piena che non una delle 10 dell'urna più vuota. Come si vede questo fatto nella rappresentazione grafica della curva ? Dai punti posti all'altezza $y = 80$ essa va nove volte sempre più spesso in giù che in su ? Si impone l'immagine seguente: tracciamo all'altezza $y = 80$ una retta orizzontale; questa retta interseca la nostra curva in tutti i punti considerati.
Se questa retta interseca la curva 10.000 e una volta in un punto che si trova sul lato destro (in discesa) di un picco, allora deve intersecarla almeno 10.000 volte in un punto situato sul lato sinistro di un picco, in salita. Infatti per poter uscire a destra da un picco deve esserci sempre entrata prima da sinistra (4). Non si sarebbe a questo punto tentati di dire: da un punto di intersezione con la retta la curva va nel tratto successivo tanto spesso in giù che in su ? Non si dovrebbe stare attenti a scommettere che la differenza scenderà da 80 a 78 ?
Naturalmente la scommessa è del tutto giustificata e l'errore nella rappresentazione geometrica è molto facile da trovare. Chiarire dettagliatamente questo errore è di un certo interesse, perchè ciò aiuta a gettar luce su una obiezione, molto interessante ma non corretta, che è stata ripetutamente avanzata contro il teorema H di Boltzmann (interpretazione cinetica dell'aumento di entropia). Boltzmann ha ideato, per replicare a questa particolare obiezione, un esempio che coincide con il nostro in tutti i tratti essenziali.
Lo si vede facilmente: la apparente contraddizione sparisce, quando all'altezza $y = 80$ si trova un numero sufficientemente grande di massimi della curva. In tal caso essa effettivamente tende, nel tratto successivo, a portarsi dall'altezza 80 più spesso in basso che in alto, nonostante le considerazioni precedenti. Percentualmente si dovranno trovare ancora più massimi ad altezze ancora più elevate.(Per $y = 100$ si trovano solo massimi). Se si cerca di immaginare come deve andare la curva si incontrano all'inizio delle nuove difficoltà. Queste si risolvono se si calcolano tutti i valori che qui si stanno considerando. Riguardo a questi calcoli ci siano concessi ancora alcuni cenni:
si pensi la curva protratta enormemente a lungo. $Z(y)$ sia il numero di punti della curva che si trovano all'altezza y. Pertanto la probabilità che da uno particolare di questi punti la curva vada in giù nel tratto successivo è (5)

$$f(y) = \frac{N + y}{2N} \qquad \text{(A)}$$

che vada all'insù

$$S(y) = \frac{N - y}{2N} \qquad \text{(B)}$$

Il numero di tratti del tipo $(y \rightarrow y-2)$ è dunque:

$$Z(y)\, f(y) = Z(y)\, \frac{N + y}{2N} \qquad \text{(C)}$$

Analogamente si trova per il numero di tratti del tipo $(y - 2 \rightarrow y)$ il valore

$$Z(y-2)\, S(y - 2) = Z(y - 2)\, \frac{N - (y - 2)}{2N} \qquad \text{(D)}$$

Per ragioni geometriche la curva deve percorrere altrettanto spesso il tratto $y \rightarrow y - 2$ che il tratto $y - 2 \rightarrow y$. Si ottiene così la formula di recursione:

$$Z(y) = Z(y-2)\,\frac{S(y-2)}{f(y)} = Z(y-2)\,\frac{N-(y-2)}{N+y} \qquad (E)$$

Si vede dunque quanto più raramente la curva sale fino a y che non fino a y − 2 (per N = 100, y = 80 si ottiene : Z(80) : Z(78) = 22 : 180; y = 98 dà : Z(98) : Z(96) = = 4 : 198)
L'interno di ogni punto ad altezza y ha una delle forma seguenti : α) $(y-2) \rightarrow y \rightarrow (y-2)$; β) $(y-2) \rightarrow y \rightarrow (y+2)$; γ)$(y+2) \rightarrow y \rightarrow (y-2)$; δ) $(y+2) \rightarrow y \rightarrow (y+2)$. Si calcola facilmente che le frequenze di queste quattro successioni stanno tra loro come (6):

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = [f(y)\,f(y)] : [f(y)\,S(y)] : [S(y)\,f(y)] : [S(y)\,S(y)]$$

o, se si divide tutto per f(y) S(y) e si prendono per f e S i valori dati da A, B

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \frac{N+y}{N-y} : 1 : 1 : \frac{N-y}{N+y} \qquad (F)$$

Per y vicino ad N dunque α è molto grande, δ molto piccolo. Quest'ultimo fatto ci dice: le discese della curva scendono per la maggior parte in modo abbastanza " liscio". Dalle equazioni E e F si possono dedurre ora senz'altro tutte le affermazioni sull'andamento medio della curva. Per riassumere possiamo dire:

1. La citata"curva" va normalmente da ciascuno dei suoi punti più alti verso il basso e solo raramente ancora più in alto.

2. Questa affermazione vale – e questo suona all'inizio particolarmente paradossale – altrettanto se la "curva" viene percorsa da sinistra a destra che da destra a sinistra (7).

Göttingen, ottobre 1906.

1) Vedi due lettere di Boltzmann nel vol. 51 della rivista inglese "Nature" (1894/95) pag. 413 e 581. Inoltre, ivi, pag. 31, 78, 152, 175, 221, 293, 319. Boltzmann Math. Annalen vol. 50 – Boltzmann, Gastheorie vol. II, par. 88 – 91.

2) Si considera il valore assoluto al solo scopo di non dovere nel seguito stare sempre a distinguere tra ordinate positive e negative.

3) La probabilità di crescita è: $\frac{Q_o}{N}$, di diminuzione : $\frac{P_o}{N}$, se $P_o > Q_o$.

4) Il fatto che qui non si tratti di nessuna "curva", ma soltanto di una successione di punti separati, non cambia niente. Se il punto arriva dall'altezza H all'altezza H + 4 , in questo intervallo deve effettivamente toccare una volta l'altezza H + 2. Può saltare questo valore tanto poco, quanto potrebbe farlo una curva continua. Nel conto si trova una discesa verso destra in soprannumero perchè per ipotesi la curva comincia con una discesa verso destra.

5) La somma dei contenuti delle urne è N, la differenza y. Nell'urna più piena si trova̲no dunque $(N + y) : 2$ palline, nella più vuota $(N - y) : 2$. Le equazioni A, B valgo̲no per ogni y, tranne per $y = 0$. E' $S(0) = 1$, $f(0) \neq 0$.

6) Il numero di volte che si presenta la forma α) è chiaramente: $\alpha = Z(y - 2)\ S(y-2)\ f(y)$, dato che essa comincia col punto $y - 2$ e, quando è salita ad y, $f(y)$ è la probabilità che il prossimo tratto vada all'ingiù. Da (E) si ha dunque $\alpha = Z(y)\ f(y)\ f(y)$. Analogamente sarà $\beta = Z(y)\ f(y)\ S(y)$ etc.

7) In seguito a questo cambiamento del senso di percorrenza ogni tratto in discesa si trasforma in un tratto in salita. Si potrebbe così argomentare con una considerazione superficiale che le curva debba mostrare nei due casi un comportamento "opposto". Una ri̲flessione analoga costituisce proprio il punto di partenza di uno dei due falsi argomenti con cui si è tentato di provare a priori l'impossibilità di una interpretazione cinetica dell'aumento di entropia (si confronti oltre alla letteratura citata nella pri̲ma nota anche: Matematische Enzyklopädie V. 8. Boltzmann; " Teoria cinetica della materia" par. 14)