

I. L' IPOTESI

I sistemi macroscopici sono composti da un numero molto elevato (dell' ordine del numero di Avogadro) di particelle; questo fatto comporta la necessità pratica di una descrizione statistica, in termini di “insiemi statistici” vale a dire, usando una terminologia matematicamente più accurata, in termini di distribuzioni di probabilità nello spazio delle fasi.

Indicando con \mathbf{q}_i e \mathbf{p}_i , rispettivamente, il vettore posizione e il vettore impulso della i -ma particella, lo stato di un sistema di N particelle è rappresentato, al tempo t , da un vettore $\mathbf{X}(t) \equiv (\mathbf{q}_1(t), \dots, \mathbf{q}_N(t), \mathbf{p}_1(t), \dots, \mathbf{p}_N(t))$ in uno spazio di dimensione $6N$, detto spazio delle fasi. Le osservabili del sistema sono rappresentate da funzioni, $A(\mathbf{X})$, definite nello spazio delle fasi. Le particelle sono soggette alle leggi deterministiche della meccanica classica e quindi $\mathbf{X}(t)$ si evolve in accordo con le equazioni di Hamilton. Se la funzione Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, come assumeremo sempre nel seguito, allora l' energia è una quantità conservata durante il moto, il quale quindi si sviluppa su una ipersuperficie a energia fissata. Indicando con $V(\{\mathbf{q}_j\})$ il potenziale di interazione tra le particelle, l' Hamiltoniana si scrive

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m} + V(\{\mathbf{q}_j\}), \quad (1)$$

e le equazioni di evoluzione sono:

$$\begin{aligned} d\mathbf{q}_i/dt &= \partial H/\partial \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i/m \\ d\mathbf{p}_i/dt &= -\partial H/\partial \mathbf{q}_i = -\partial V/\partial \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (2)$$

con $i = 1, \dots, N$. Supponiamo di misurare un' osservabile del sistema, che si trova in equilibrio termodinamico. È fondamentale notare che la scala dei tempi macroscopici, quelli delle osservazioni sul sistema, è molto più grande della scala dei tempi della dinamica microscopica (2), quelli che dettano la rapidità dei cambiamenti a livello molecolare. Ciò significa che un dato sperimentale è il risultato di un' unica osservazione durante la quale, in realtà, il sistema passa attraverso un grandissimo numero di stati microscopici diversi. Se il dato

si riferisce all' osservabile $A(\mathbf{X})$, esso va quindi confrontato con una media eseguita lungo l' evoluzione del sistema e calcolata su tempi molto lunghi (dal punto di vista microscopico):

$$\bar{A}(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A(\mathbf{X}(t)) dt. \quad (3)$$

Il calcolo della media temporale $\bar{A}(t_0, T)$ di un' osservabile qualunque richiede, in linea di principio, sia la conoscenza dello stato microscopico completo del sistema in un certo istante, sia la determinazione della corrispondente traiettoria nello spazio delle fasi. La richiesta è evidentemente inesaudibile per cui, se $\bar{A}(t_0, T)$ dipendesse in maniera molto forte dallo stato iniziale del sistema, non si potrebbero fare previsioni utili neppure di tipo statistico, anche trascurando la difficoltà di integrare il sistema (2).

L' *ipotesi ergodica* indica una via per superare questo ostacolo. Essa sostanzialmente afferma che ogni ipersuperficie di energia fissata è completamente accessibile a qualunque moto con la data energia; ovvero: una ipersuperficie di energia costante non può essere suddivisa in regioni (misurabili) contenenti ognuna moti completi, cioè regioni invarianti per evoluzione temporale (se questa condizione è soddisfatta la ipersuperficie si dice 'metricamente non decomponibile' o 'metricamente transitiva'). Inoltre, per ogni traiettoria il tempo medio di permanenza in una certa regione è proporzionale al volume della regione.

Se le condizioni precedenti, che costituiscono appunto il nucleo dell' ipotesi ergodica, sono soddisfatte, segue che, per T sufficientemente grande, la media in (3) dipende solo dall' energia del sistema e assume quindi lo stesso valore su tutte le evoluzioni con uguale energia; inoltre, questo valore comune è calcolabile eseguendo una media di $A(\mathbf{X})$ in cui tutti (e solamente) gli stati con la fissata energia contribuiscono con uguale peso. Nelle applicazioni, tenendo conto del fatto che l'energia di qualunque sistema è nota con un errore, è comodo considerare nella media tutti gli stati con energia compresa in un intervallo fissato. La densità di probabilità uniforme nella regione con energia fissata a meno di un'incertezza Δ definisce la densità microcanonica, o insieme microcanonico. Indicando tale densità con $\rho_{mc}(\mathbf{X})$, e l'elemento di volume dello spazio delle fasi con $d\Gamma = d\mathbf{q}_1 \cdots d\mathbf{q}_N d\mathbf{p}_1 \cdots d\mathbf{p}_N$ (che, ricordiamo, è invariante nel moto), si ha

$$\rho_{mc}(\mathbf{X}) = \left(\int_{E \leq H(\mathbf{X}) \leq E+\Delta} d\Gamma \right)^{-1} \equiv (\Gamma_{\Delta}(E))^{-1}$$

e l' ipotesi ergodica permette di scrivere:

$$\bar{A} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A(\mathbf{X}(t)) dt = \int A(\mathbf{X}) \rho_{mc}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \equiv \langle A \rangle. \quad (4)$$

Va sottolineato che la precedente equazione ci libera contemporaneamente dalla necessità di determinare uno stato (iniziale) del sistema e di risolvere le equazioni del moto. La validità, o meno, della (4), cioè la possibilità di sostituire la media di un' osservabile qualunque lungo un' evoluzione temporale con una media dell' osservabile nello spazio delle fasi, costituisce il *problema ergodico*. Poiché se un sistema isolato in equilibrio risulta descrivibile mediante l' insieme microcanonico, non è difficile mostrare, per esempio, che un sistema in contatto con un termostato è ben descritto dall' insieme canonico, la dimostrazione della (4) può essere ritenuta la legittimazione dinamica dell' introduzione degli insiemi statistici.

Il problema ergodico nasce, insieme all' ipotesi ergodica, dalle idee di L. Boltzmann sulla meccanica statistica [1] ed è stato in seguito studiato in termini matematici generali soprattutto da J. von Neumann e G. D. Birkhoff.

L' “ipotesi ergodica” originale di Boltzmann era la seguente: la superficie di energia costante è composta di una quantità enorme (ma finita) di celle, che possono essere numerate; durante l'evoluzione temporale una traiettoria passa attraverso tutte le celle; ciò fornisce la possibilità di sostituire una media nel tempo con una media nello spazio delle fasi.

Una interpretazione, dovuta agli Ehrenfest, nel contesto usuale della meccanica classica nello spazio delle fasi continuo, ha riformulato l' ipotesi originale nell' ipotesi che una traiettoria evolventesi su una superficie di energia costante finisce per visitare tutti i suoi punti ¹.

La (quasi ovvia) impossibilità per una singola traiettoria di visitare ogni punto di una (iper-)superficie ha poi condotto gli Ehrenfest alla formulazione della cosiddetta “ipotesi quasi ergodica”, secondo la quale ogni evoluzione su una superficie di energia assegnata (tranne, al più, un insieme di punti iniziali di misura nulla) copre densamente la superficie stessa.

La moderna teoria ergodica può essere considerata una branca della teoria della misura e dell' integrazione, con obiettivi che vanno ben al di là del problema originale formulato da Boltzmann nel contesto della meccanica statistica. Il problema ergodico adesso può essere posto nei termini seguenti. Si considera un sistema dinamico, cioè una legge di evoluzione deterministica in uno spazio delle fasi Ω

$$\mathbf{X}(0) \rightarrow \mathbf{X}(t) = U^t \mathbf{X}(0) \tag{5}$$

¹ Essendo ben documentato il punto di vista finitista di Boltzmann, è quasi sicuro che la formulazione degli Ehrenfest non possa essere a lui attribuita.

e una misura $d\mu(\mathbf{X})$ invariante sotto l'evoluzione data da U^t , i.e. $d\mu(\mathbf{X}) = d\mu(U^{-t}\mathbf{X})$. Il sistema dinamico $(\Omega, U^t, d\mu(\mathbf{X}))$ si dice ergodico, rispetto alla misura $d\mu(\mathbf{X})$, se, per ogni funzione integrabile $A(\mathbf{X})$ e per quasi tutte (rispetto a μ) le condizioni iniziali $\mathbf{X}(t_0)$, si ha:

$$\bar{A} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A(\mathbf{X}(t)) dt = \int A(\mathbf{X}) d\mu(\mathbf{X}) \equiv \langle A \rangle, \quad (6)$$

dove $\mathbf{X}(t) = U^{t-t_0}\mathbf{X}(t_0)$. La domanda che ci si pone è quindi sotto quali condizioni un sistema dinamico risulti ergodico. Il problema è stato affrontato da G. D. Birkhoff che ha dimostrato i seguenti teoremi. Posto $t_0 = 0$ e $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$,

I *Per quasi tutte le condizioni iniziali \mathbf{X}_0 la media su tempo infinito*

$$\bar{A}(\mathbf{X}_0) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(U^t \mathbf{X}_0) dt \quad (7)$$

esiste e il limite non dipende dalla scelta del punto iniziale su una data traiettoria.

II *Una condizione necessaria e sufficiente perché un sistema sia ergodico, cioè la media temporale $\bar{A}(\mathbf{X}_0)$ non dipende dalla condizione iniziale (per quasi ogni \mathbf{X}_0), è che lo spazio delle fasi Ω sia metricamente indecomponibile (o metricamente transitivo). Quest'ultima proprietà significa che Ω non può essere suddiviso in due parti, ognuna di misura positiva, che siano invarianti rispetto alla dinamica U^t .*

Il teorema **I** è abbastanza generale e non molto stringente, infatti assicura che la media nel tempo $\bar{A}(\mathbf{X}_0)$ esiste, ma non garantisce la sua indipendenza dalle condizioni iniziali, al variare della traiettoria. Il risultato **II** è più interessante ma praticamente inconclusivo per la meccanica statistica, dato che, in generale, non è possibile decidere se un dato sistema è metricamente indecomponibile. In pratica il teorema **II** si limita a spostare il problema.

II. COMMENTI

A

In realtà, per un sistema macroscopico il problema dell'ergodicità, oltre che di difficile soluzione, potrebbe essere sostanzialmente irrilevante nel contesto della meccanica statistica. A causa del grande numero di particelle, e quindi dell'enormità delle regioni di spazio delle fasi coinvolte, i tempi T necessari perché le due medie nell'eq. (4) risultino confrontabili (ammesso che siano uguali), possono diventare molto più grandi dell'età dell'Universo, *nel*

caso di osservabili qualunque. In questa situazione T non avrebbe nessun interesse fisico, e ugualmente la relazione (4). Una questione importante è quindi quanto deve essere grande T affinché $\overline{A}(t_0, T)$ risulti vicino a $\langle A \rangle$. Ci si aspetta che la risposta a questa domanda, in generale, possa dipendere sia dall' osservabile A che dal numero di particelle N . Come esempio si consideri la funzione

$$A(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{X} \in G \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (8)$$

dove G è una regione contenuta nello spazio delle fasi accessibile a un sistema con una certa energia. Assumendo che G sia un ipercubo $6N$ dimensionale di lato ϵ , si ha che $\langle A \rangle = \epsilon^{6N}/\Gamma_{\Delta}(E)$ è il volume relativo occupato da G nella regione permessa di spazio delle fasi; e $\overline{A}(T)$ è la frazione di tempo che la traiettoria $\mathbf{X}(t)$ passa in G durante l' intervallo $[0, T]$. Perché $\overline{A}(T)$ dia una stima ragionevole di $\epsilon^{6N}/\Gamma_{\Delta}(E)$ la traiettoria deve aver esplorato una buona parte del volume $\Gamma_{\Delta}(E)$. Se (in accordo con l' ipotesi ergodica) escludiamo che ci siano regioni preferite, il segnale che una “buona esplorazione” è stata compiuta è dato dal ritorno nella regione G , da cui possiamo assumere che il sistema sia partito. Una rozza stima di T_{eq} , tempo necessario per avere un buon accordo tra $\overline{A}(T)$ and $\langle A \rangle$, può quindi fornirle il tempo di ritorno in G . Si consideri μ_n , la proiezione di G sullo spazio a 6 dimensioni generato dalle variabili $(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n)$ descrittive la n -ma particella. Se questa particella parte da μ_n , occorrerà un certo tempo $\tau_n(\epsilon)$ prima che ritorni in μ_n . Una stima grossolana è $\tau_n(\epsilon) \sim \epsilon^{-\gamma}$, in cui il valore preciso di γ non è particolarmente importante ². In prima approssimazione si può assumere, come è ragionevole per i gas diluiti, che i processi di ritorno per le differenti particelle siano indipendenti l' uno dall' altro. Di conseguenza, per avere $\overline{A}(T) \simeq \langle A \rangle$ si deve aspettare un tempo $T_{eq} \sim (\epsilon^{-\gamma})^N$, cioè un tempo esponenzialmente grande in N .

Si osservi che la funzione definita in (8) può essere scritta anche:

$$A(\mathbf{X}) = \prod_n \chi_{\mu_n}(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) ,$$

dove $\chi_{\mu_n}(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n)$ è la funzione caratteristica del sottoinsieme μ_n , ovvero $\chi_{\mu_n}(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) = 1$ se

² Per esempio, se si assume che ogni particella compia un moto casuale tra le $\mathcal{N} \sim \epsilon^{-6}$ celle di volume ϵ^6 del suo spazio delle fasi, il numero di celle differenti visitate cresce come $t^{1/2}$, quindi il tempo tipico per il ritorno nella cella originale va come $\tau \sim \epsilon^{-12}$.

$(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) \in \mu_n$ e $\chi_{\mu_n}(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) = 0$ altrimenti. Questo rende evidente che una tale funzione non è interessante da un punto di vista macroscopico, dato che l'uscita di una singola particella dalla regione μ_n produce una variazione di $A(\mathbf{X})$ dello stesso ordine di grandezza del suo valore. Per questo possiamo chiamare $A(\mathbf{X})$ una funzione *microscopica*. La precedente discussione mostra che il tempo per avere l'equilibrio di una funzione microscopica tipicamente è in relazione con il tempo di ricorrenza di Poincaré.

D'altra parte l'argomento precedente è una riformulazione della risposta data originariamente da Boltzmann alle critiche sulla validità del suo teorema H . Infatti, a causa dell'enorme numero di particelle presenti, in un sistema macroscopico il tempo di ricorrenza di uno stato di non equilibrio è inimmaginabilmente grande. Per esempio, Boltzmann stimò che, in una sfera di aria di raggio 1 cm alla temperatura di $300K$ e a pressione standard, per ritornare a uno stato in cui la concentrazione delle molecole differisca dal valore medio per l'1% il tempo di attesa è $10^{10^{14}}$ secondi !!

I tempi esponenzialmente grandi (in N), che appaiono in questi due esempi, hanno la loro comune origine nella piccolezza (esponenziale) dei volumi relativi delle regioni coinvolte: quello dove $A(\mathbf{X})$ è differente da zero e quello dove lo stato del sistema è leggermente fuori equilibrio. Tuttavia questi tempi lunghi ci danno due informazioni molto differenti. Nel primo caso un tempo così grande non è positivo, perché qualifica come praticamente inutile l'eq. (4). Nel secondo caso un tempo così lungo è benvenuto, perché permette di introdurre la nozione di equilibrio di un sistema macroscopico in meccanica statistica.

B

A questo punto è necessario notare che le osservabili rilevanti per la termodinamica, quelle con le quali sono caratterizzati gli stati di equilibrio, non sono funzioni generiche. Sono poche e principalmente di un tipo particolare, cosicché la questione fisicamente interessante è se i tempi per raggiungere l'equilibrio possano essere corti abbastanza per queste funzioni termodinamicamente interessanti. In effetti il recupero della (4) è possibile basandosi sulle seguenti considerazioni:

- a) nei sistemi termodinamici il numero di costituenti microscopici è molto grande;
- b) la questione interessante per la meccanica statistica è la validità della (4) non per

osservabili generiche, bensì per le poche grandezze rilevanti nella termodinamica (per es., l'energia cinetica, la pressione, la densità) che hanno una struttura particolare, cioè sono esprimibili come somma di contributi separati dovuti ai costituenti microscopici;

d) è accettabile che l'equazione (4) possa non valere per condizioni iniziali contenute in regioni di misura complessivamente piccola (tendente a zero se $N \rightarrow \infty$).

Tenendo conto di queste richieste fisiche, matematicamente meno vincolanti, si può pensare di ottenere risultati interessanti, anche se non così generali come i teoremi di Birkhoff, i quali valgono per sistemi dinamici generici, anche di bassa dimensionalità, per osservabili non specifiche, e per quasi tutte le condizioni iniziali.

Come esempio di conclusioni che si possono trarre da questa impostazione del problema, riportiamo i seguenti risultati, dovuti a A. J. Khinchin [2], che riguardano un gas ideale.

C

Si considera un sistema con Hamiltoniana separabile:

$$H = \sum_{n=1}^N H_n(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) \quad (9)$$

e una classe speciale di osservabili (dette *funzioni somma*) che sono esprimibili come somma di N componenti, dipendenti ognuna dalle variabili di una sola particella, cioè della forma

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^N f_n(\mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n) \quad (10)$$

dove $f_n = O(1)$, e nel caso più semplice e frequente le componenti f_n sono tutte uguali. Esempi interessanti di funzioni somma sono dati dalla pressione, l'energia cinetica, l'energia totale e la funzione di distribuzione di singola particella. Si noti che, a differenza della funzione $A(\mathbf{X})$ definita in (8), un cambiamento in una singola f_n , di $O(1)$, produce una variazione relativa $O(1/N)$ in $f(\mathbf{X})$: le funzioni somma sono “buone” funzioni macroscopiche, poiché non sono così sensibili ai dettagli microscopici.

Dato che l'Hamiltoniana è separabile si ha:

$$\langle f \rangle = O(N) \quad \text{and} \quad \sigma^2 = \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle = O(N). \quad (11)$$

Si ricordi che $\langle \rangle$ indica la media sull' insieme microcanonico (stiamo considerando un sistema con energia assegnata). Considerando la media nel tempo $\bar{f}(\mathbf{X})$ di un' osservabile f , lungo una traiettoria che parte da \mathbf{X} , sotto ipotesi abbastanza generali (e senza invocare la transitività metrica) si ha:

$$\text{Prob} (|\bar{f} - \langle f \rangle| > a) < \frac{4}{a} \langle |f - \langle f \rangle| \rangle < \frac{4}{a} \sigma, \quad (12)$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta alla relazione (disuguaglianza di Lyapunov o di Schwartz)

$$\langle |f - \langle f \rangle| \rangle \leq \langle (f - \langle f \rangle)^2 \rangle^{1/2}.$$

La disuguaglianza (12) implica

$$\text{Prob} \left(\left| \frac{\bar{f}}{\langle f \rangle} - 1 \right| > \frac{a}{|\langle f \rangle|} \right) < \frac{4}{a} \sigma. \quad (13)$$

Se si sceglie $a = \sigma^{3/2}$ e si tiene conto della (11) si può scrivere

$$\text{Prob} \left(\left| \frac{\bar{f}}{\langle f \rangle} - 1 \right| > \frac{K_1}{N^{1/4}} \right) < \frac{K_2}{N^{1/4}} \quad (14)$$

dove K_1 e K_2 sono costanti $O(1)$. Si ha quindi che, per la classe delle funzioni somma l' insieme dei punti iniziali per i quali la media nel tempo differisce da quella nello spazio delle fasi più di una certa quantità, *che va a zero per $N \rightarrow \infty$* , costituisce una frazione dei punti con energia data che va a zero per $N \rightarrow \infty$. Sostanzialmente, in questo limite e per questa classe di funzioni la (4) è vera (tranne che in una zona dello spazio delle fasi, che è sempre più piccola all' aumentare di N) e questo indipendentemente dai dettagli della dinamica.

Spostando l' interesse dalla ergodicità come proprietà del sistema, alla ergodicità come proprietà delle osservabili, si trova che, nei casi che interessano, è possibile sostituire una media temporale con la media microcanonica. Ciò però lascia ancora aperto il problema fondamentale dei tempi necessari per raggiungere l'equilibrio. Anche su questo punto si possono usare le assunzioni (9 - 10) e la (11) per mostrare che:

$$\text{Prob} \left(\left| \frac{f}{\langle f \rangle} - 1 \right| > \frac{K_3}{N^{1/4}} \right) < \frac{K_4}{N^{1/4}} \quad (15)$$

ovvero: le osservabili fisicamente rilevanti sono auto-medianti, cioè per grandi valori di N , le osservabili di questo tipo sono soggette alla legge dei grandi numeri e, su una ipersuperficie

di data energia, assumono un valore pressoché costante (macroscopicamente), tranne che in regioni di misura complessiva molto piccola.

La relazione (15) è importante per due motivi. Da una parte assegna alla quantità $\langle f \rangle$ il ruolo di rappresentare il valore quasi costante (macroscopicamente) dell'osservabile $f(\mathbf{X})$, dandole un significato fisico indipendentemente da ogni media nel tempo. Dall'altra, poiché in queste condizioni è ragionevole supporre che il risultato di una media temporale non dipenda molto da T né, generalmente, dallo stato di partenza, suggerisce che la relazione (4) possa valere anche per 'piccoli' T , e cioè abbia interesse fisico, consentendo di collegare una misura di f su tempi finiti a $\langle f \rangle$. Assumeremo quindi che la media sulla distribuzione microcanonica fornisca i valori corretti delle osservabili termodinamiche che si misurano sul sistema in equilibrio.

Si può ritenere che l'essenza di questi risultati sia che la meccanica statistica basata sugli ensembles funziona indipendentemente dalla validità dell'ergodicità (in senso matematico). In effetti questo era anche (e già) il punto di vista di Boltzmann stesso [1].

D

L'aspetto debole, dal punto di vista fisico, dell'approccio alla Khinchin riguarda l'assunzione di non interazione, eq. (9), in quanto un requisito essenziale per un comportamento termodinamico è la possibilità di scambiare energia tra particelle. Naturalmente a Khinchin il problema era presente essendo chiaro anche che una vera Hamiltoniana può essere al più solo approssimativamente separabile. L'idea di fondo è che l'interazione tra le particelle contribuisce molto poco nel calcolo delle grandezze macroscopiche all'equilibrio e che, nella maggior parte dei calcoli in meccanica statistica, questi termini possono essere trascurati.

La poco desiderabile restrizione sulla struttura separabile dell'Hamiltoniana, può essere superata. Mazur e van der Linden [3] studiando sistemi di particelle interagenti tramite potenziali a corto range, hanno mostrato che il punto di vista di Khinchin sull'importanza dell'interazione tra particelle è essenzialmente corretto. Lasciando da parte gli aspetti tecnici del lavoro, l'interpretazione fisica del risultato è che, a causa della corta portata dell'interazione, un sistema di molte particelle si comporta come se fosse costituito da un grande numero di componenti non interagenti. Come scrivono Mazur e van der Linden: "*One might think of subsystems consisting of large numbers of particles; the interaction between these*

subsystems is then a surface effect and very small compared to the energy content of the subsystems themselves.” I loro calcoli implicano che *”the energies of these subsystems behave as almost independent random variables, so that a central limit theorem still applies”*. È anche interessante notare che il risultato ottenuto dai due autori è valido a esclusione, al più, di un numero finito di temperature, alle quali il sistema può subire una transizione di fase, a differenza del caso non interagente.

E

È utile sottolineare due punti:

- nei risultati sopra esposti, oltre alla condizione che la portata dell’interazione sia limitata, la dinamica non ha un ruolo molto importante: per le osservabili interessanti, l’esistenza di buone proprietà statistiche su ogni superficie di energia assegnata, non dipende dai dettagli della dinamica, ma è legata al fatto che $N \gg 1$. Questo aiuta anche a capire perché normalmente si trascuri la grande quantità di altri integrali del moto, che esistono in ogni sistema Hamiltoniano;
- il fatto che le osservabili interessanti abbiano valore (macroscopicamente) quasi costante *sulla maggior parte* della ipersuperficie di energia assegnata, ma *non su tutta*, permette l’ esistenza degli stati di non equilibrio, in questo quadro concettuale. Il passo successivo, per dare sostanza all’idea di equilibrio e perché il quadro risulti coerente, sarà mostrare che, partendo da uno di questi stati di non equilibrio, la dinamica Hamiltoniana fa evolvere il sistema nella “direzione giusta” (equazione di Boltzmann).

-
- [1] Sull’ origine dell’ ipotesi ergodica si può leggere il paragrafo **9.1** del libro di G. Gallavotti: *Statistical Mechanics. A short treatise*. Il libro è consultabile nella biblioteca del Dipartimento, ma è anche scaricabile collegandosi all’ indirizzo <http://ipparco.roma1.infn.it/pagine/libri.html>.
- [2] A. J. Khinchin, *Mathematical Foundation of Statistical Mechanics* (Dover, New York, 1949).
- [3] P. Mazur and J. van der Linden, *Asymptotic form of the structure function for real systems*, J. Math. Phys. **4**, 271.