**Compiti per le vacanze primaverili**

**Es. 1**
$\mathbf{A}$ è una matrice 4x4 con elementi

$$A_{ii} = \alpha \ , \ A_{ij} = 1 \ se \ j > i \ , \ A_{ij} = 0 \ se \ j < i \ ,$$

con $\alpha$ reale. Calcolare

$$e^{t\mathbf{A}} \, .$$

**Es. 2**
Dato lo spazio vettoriale di dimensioni $N+1$ delle funzioni in $[0, \pi]$ della forma

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)$$

a cui corrisponde il vettore

$$\mathbf{v} = (a_0, a_1, a_2, ..., a_N, b_1, b_2, ..., b_N)$$

scrivere la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta l'operatore derivata e la matrice $\mathbf{B}$ che rappresenta l'operatore derivata seconda.
Calcolare la matrice

$$\mathbf{C}(r) = e^{r\mathbf{A}} \, .$$

Suggerimento, le cose diventano particolarmente semplici se si capisce il significato di $\mathbf{C}(r)$. Come viene trasformata una funzione $f(x)$ con l'applicazione dell'operatore di $\mathbf{C}(r)$? Cominciare considerando il caso di $r$ piccolo.

**Es. 3**
$\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono matrici reali proporzionali a due proiettori su due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non necessariamente ortogonali, tali che

$$\mathbf{A}^2 = a\mathbf{A} \ \ e \ \ \mathbf{B}^2 = b\mathbf{B}$$

mostrare che esistono due costanti reali $\alpha$ e $\beta$ tali che

$$\mathbf{AB} = \alpha\mathbf{A} \ \ e \ \ \mathbf{BA} = \beta\mathbf{B} \, .$$

Calcolare la matrice

$$\mathbf{C} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\,.$$

**Es. 4**

Sia $\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})$ un vettore con componenti complesse, e $\mathbf{F}$ l'operatore lineare che trasforma $\mathbf{x}$ in $\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ nel modo seguente

$$u_k = \sum_{n=0}^{N-1} F_{kn} x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} x_n \ , \ \ k = 0, 1, 2, ..., N-1$$

mostare che $\mathbf{F}$ è un operatore unitario e calcolare $\mathbf{F}^{-1}$

Questa è la trasformata di Fourier discreta, MOLTO utile nelle applicazioni, particolarmente importante è il caso $N = 2^M$ in cui si può usare un metodo numerico molto potente (FFT = Fast Fourier Transform) che è alla base di molte applicazioni tipo la TAC. La potenza del metodo FFT per $N \gg 1$, è che il numero di operazioni necessarie è solo $O(N \ln N)$ molto minore di $O(N^2)$ che si ha con un approccio diretto.

**Es. 5**

Trovare la soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) + g(x) \tag{1}$$

ove $0 \le x \le \pi$, $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$ e $g(x) = 2\sin x + 5\sin 2x$, con condizione iniziale:

$$f(x,0) = \sin x + 4\sin 2x + \sin 3x\,.$$

Stimare il tempo $t_*$ tale che per $t > t_*$ la soluzione $f(x,t)$ è distante meno dell'1% dalla funzione

$$h(x) = \lim_{t\to\infty} f(x,t)\ .$$

Suggerimento: trovare la soluzione stazionaria della (1), e poi usare la linearità dell'equazione.