

## Il caos: dalla meccanica celeste alla complessità del reale

Angelo VULPIANI

### Il determinismo

Iniziamo con una piccola digressione sul programma di formalizzazione matematica della fisica che, iniziato con la pubblicazione dei Principia di Newton nel 1687, è poi diventato un punto di riferimento per tutte le teorie scientifiche. Nella tradizionale impostazione, che potremmo indicare come meccanicistica, ci si aspetta che una volta scritte le equazioni che regolano l'evoluzione temporale di un fenomeno e determinate le condizioni iniziali, risolvendo le equazioni, si possa avere una completa conoscenza del sistema ad ogni tempo futuro. Questa impostazione è ben riassunta nel famoso manifesto di Laplace<sup>1</sup> sul determinismo:

*Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell' universo come effetto del suo stato anteriore e come causa del suo stato futuro. Un' intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze di cui è animata la natura e le posizioni rispettive degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all' analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi.*

L'essenza di questo famoso brano può essere riassunta dicendo che le leggi della fisica classica sono perfettamente deterministiche: noto esattamente lo stato di un sistema ad un certo istante la sua evoluzione è univocamente determinata ad ogni tempo successivo. Anche se con l' introduzione della meccanica quantistica, una teoria intrinsecamente probabilistica, in linea di principio c' è stato un superamento del determinismo, in tutti i problemi a livello macroscopico (ad esempio quelli in ingegneria e geofisica) le equazioni deterministiche mantengono la loro validità.

Ovviamente non esiste nessun matematico tanto bravo e, a parte casi particolari, non è affatto facile trovare esplicitamente l'evoluzione temporale di un sistema. Tuttavia in linea di principio niente sembrerebbe contrario all'idea che le equazioni possano essere risolte con calcoli più o meno difficili. Questo approccio sembrò trovare conferme sistematiche in astronomia, raggiungendo precisioni altissime nell' accordo tra il calcolo teorico e le os-

servazioni. Uno dei successi più clamorosi fu, nel XIX secolo, la scoperta del pianeta Nettuno. Una serie di osservazioni indicava un considerevole scostamento del moto di Urano dalle posizioni previste dalla meccanica newtoniana. Ipotizzando che tale discrepanza non fosse dovuta ad una manchevolezza della teoria di Newton, bensì alla presenza di un pianeta sconosciuto, utilizzando le leggi della dinamica e la legge di gravitazione fu calcolata la posizione di questo ipotetico pianeta che venne poco dopo osservato al telescopio.

Tuttavia il mondo è pieno di fenomeni che appaiono decisamente irregolari (basti pensare all'atmosfera ed alle correnti marine). Nell'impostazione meccanicistica tradizionale questa irregolarità è pensata come solo "apparente", cioè dovuta ad un numero molto grande di cause ognuna delle quali è però semplice. Questo modo di interpretare i fenomeni irregolari, che possiamo chiamare filosofia del "mattoncino elementare semplice", è stato sostanzialmente accettato fino a pochi decenni or sono. In questa impostazione, che possiamo chiamare riduzionistica, il tutto è la somma delle sue parti. Questo approccio ha portato a grandi risultati, in particolare nella fisica delle particelle elementari e più in generale nella fisica microscopica.

### **La grande scoperta di Poincaré**

Il padre della teoria del caos è stato Henri Poincaré<sup>2</sup>, la sua scoperta nasce proprio nell'ambito della meccanica celeste, la scienza che per lungo tempo ha incarnato l'ideale laplaciano. È ben noto il cosiddetto problema dei due corpi (già risolto da Newton): il moto di un pianeta in interazione con il Sole, trascurando l'interazione (piccola) tra i pianeti, si può determinare in modo esplicito risolvendo le equazioni differenziali. Il problema successivo è quello dei tre corpi (ad esempio Terra-Sole-Luna oppure Sole-Giove-Asteroidi) ed è decisamente più complicato. Per molto tempo si ritenne che le difficoltà del problema fossero solo questioni di tecnica e pazienza.

Nel 1887 il re di Svezia e Norvegia Oscar II indisse un premio, da consegnare nel 1889 in occasione del suo sessantesimo compleanno, per un lavoro matematico sul problema dei tre corpi. Poincaré partecipò e vinse il premio, diventando una star internazionale. Ma quale fu il contributo di Poincaré? Non riuscì a risolvere il problema dei tre corpi, ma capì che le difficoltà non erano dovute a scarsa bravura, o mancanza di impegno dei matematici che l'avevano preceduto, bensì ad un'importante proprietà intrinseca del sistema.

Poincaré si rese perfettamente conto della grande complessità delle traiettorie del problema dei tre corpi (più in generale di tutti i sistemi caotici) e

scrisse che non provava neanche a disegnarle; ora con la grafica al computer ci si può provare e vedere su uno schermo quello che il grande matematico era stato in grado di capire. Nonostante la natura deterministica del problema, le soluzioni presentano la così detta sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali (l'effetto farfalla). Ecco come lo stesso Poincaré spiega gli aspetti salienti del fenomeno:

*Una causa piccolissima che sfugge alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. .... Ma se pure accadesse che le leggi della natura non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente .... può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.*

Laplace non aveva impostato il problema nel modo completamente "giusto", la domanda più corretta è: una volta assunto il carattere deterministico di un fenomeno, cosa possiamo dire se conosciamo la condizione iniziale con una piccola incertezza?

### **Il caos non è solo una curiosità matematica**

Nonostante il suo grande valore concettuale, per lungo tempo la scoperta del caos venne quasi accantonata, almeno dalla comunità dei fisici. Il motivo di tale "dimenticanza" è quasi certamente da ricercare nella nascita della relatività prima e della meccanica quantistica dopo, che assorbirono le energie dei fisici più brillanti. Non venne pienamente compresa l'importanza della sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali per problemi pratici quali le previsioni del tempo. Ancora negli anni 50 John von Neumann (certo non l'ultimo sprovveduto) era convinto che non solo con lo sviluppo dei computer si potessero fare accurate previsioni meteo, ma addirittura controllare (e quindi modificare a nostro piacimento) l'evoluzione dell'atmosfera.

Si dovette attendere fino agli anni sessanta quando vari scienziati (primi fra tutti il meteorologo americano E. Lorenz, l'astronomo francese M. Hénon ed il fisico sovietico B. Chirikov) rilanciarono il settore, mostrando come la presenza del caos nei sistemi deterministici non sia affatto una patologia matematica bensì un comportamento molto comune<sup>3</sup>.

Per capire l'importanza pratica e concettuale del caos discutiamo brevemente il problema delle previsioni meteorologiche. L'atmosfera è ovviamente un sistema molto complicato descritto da tante variabili. In linea di principio

le equazioni sono note e si potrebbe pensare di usare un grande computer che tratti un modello che includa la temperatura, le velocità del vento (ed altre variabili) su una griglia molto fitta (diciamo con la distanza tra i nodi di un millimetro), ma questo non è possibile (in pratica la distanza dei nodi è qualche decina di chilometri in orizzontale e centinaia di metri in verticale). Quindi nella risoluzione numerica è necessaria una “modellizzazione” delle piccole scale, per non parlare dei problemi pratici per risolvere le equazioni; saper controllare tutti questi aspetti per le previsioni meteo è un’ arte altamente sofisticata.

Ma le difficoltà non nascono solo dalla presenza di un numero molto elevato di variabili. Il meteorologo statunitense Edward Lorenz (uno dei pionieri del caos) studiando un modello minimale per la circolazione atmosferica, mostrò in modo inequivocabile come il comportamento irregolare dei fluidi non sia dovuto solo al grande numero di variabili in gioco ma anche al caos deterministico che è presente anche in sistemi apparentemente semplici<sup>4</sup>.

Pure un sistema con poche variabili può essere caotico, in questo caso un piccolo errore sulle condizioni iniziali viene amplificato velocemente (esponenzialmente). Anche se (ipoteticamente) l’evoluzione dell’ atmosfera fosse regolata da un sistema con solo tre variabili, ugualmente, in presenza di caos, non saremmo in grado di fare previsioni dopo un certo tempo. Questo è quello che viene chiamato *effetto farfalla*: un’ inevitabile incertezza sulla condizione iniziale implica l’ impossibilità di predire in modo accurato il sistema dopo un tempo caratteristico determinato da un parametro chiamato esponente di Lyapunov. In termini semplici diciamo che questo tempo caratteristico è quello necessario per avere un raddoppio dell’ errore iniziale: a causa della crescita esponenziale dopo qualche tempo caratteristico non abbiamo più la possibilità di una previsione accurata. Il tempo caratteristico è una quantità intrinseca del sistema e non dipende dalla nostra bravura: per l’ atmosfera è dell’ordine di qualche giorno, nel sistema solare vari milioni di anni. Questa enorme differenza spiega perché gli astronomi sembrano più bravi degli esperti di meteorologia.

L’ espressione effetto farfalla nasce dal titolo di Lorenz *Può il battito di ali di una farfalla in Brasile provocare un uragano in Texas?* ed è spesso fraintesa; il significato corretto è che partendo da due situazioni iniziali quasi uguali (quella con il battito d’ali della farfalla e quella senza) dopo qualche settimana si hanno situazioni meteo molto diverse, non necessariamente con un uragano.

I risultati di Lorenz mostrano come l’ irregolarità presente in sistemi

complessi (come l'atmosfera) non sia necessariamente una conseguenza della sovrapposizione del comportamento di tanti mattoni "elementari". Se tali mattoni sono caotici allora la complessità è, in qualche modo, intrinseca.

### **Il caos nella descrizione della realtà**

C'è chi sostiene che il caos abbia rappresentato una vera e propria rivoluzione scientifica, la terza del XX secolo (dopo la relatività e la meccanica quantistica)<sup>5</sup>. I problemi sollevati dal caos sono sicuramente molto importanti sia per gli aspetti pratici che concettuali, ma parlare di svolta paradigmatica è forse un po' troppo. Invece di una rivoluzione caotica, che sarebbe nata negli anni sessanta, è più corretto parlare di una riscoperta da parte dei fisici del lavoro di Poincaré, la cui eredità non è mai stata dimenticata dai matematici. L'esplosione di interesse sul caos non nasce dal nulla, ma è stata possibile solo grazie ad una serie di contributi (soprattutto di matematici) che si sono succeduti per vari decenni.<sup>6</sup>

L'impossibilità di fare previsioni a lungo termine in sistemi deterministici è stata anche usata in chiave antiscientista. L'argomento, molto superficiale, è il seguente: *in presenza di caos non si è in grado di fare previsioni a lungo termine, allora la scienza è impotente, e questo è detto proprio da scienziati.*

La sostanza del caos deterministico non è affatto una dimostrazione della debolezza della scienza che, costretta ad abbandonare il determinismo, non sarebbe più capace di fare previsioni. Difficoltà queste che dovrebbero spingere ad una scienza "alternativa" lontana da quella ufficiale incapace di affrontare i molteplici aspetti della complessità del mondo reale.

A livello meno banale c'è stato un acceso dibattito sul determinismo, il ruolo dell'aleatorio e più in generale della complessità nella scienza<sup>7</sup>, che ha spesso toccato livelli di grande asprezza<sup>8</sup>. Il matematico R. Thom (il "padre" della teoria delle catastrofi), in una lunga diatriba contro Prigogine sostiene, senza mezzi termini, che *la fascinazione dell'aleatorio è sintomo di un'attitudine antiscientista per eccellenza, tanto più che- in larga misura- procede da una sorta di propensione al confusionismo, giustificabile presso autori di formazione letteraria ma imperdonabile a studiosi in linea di principio avvezzi ai rigori della razionalità scientifica, [...] il caso è un concetto affatto negativo, vuoto, e dunque spoglio d'interesse scientifico; il determinismo invece è un oggetto di affascinante ricchezza per quanti sappiano esaminarlo*<sup>9</sup>.

Anche senza condividere completamente le posizioni di Thom è importante la sua preoccupazione che il caos possa essere usato come grimaldello antiscientista.

L'impossibilità di una "scienza deterministica", nel senso che lo stato di un sistema non può essere predetto con precisione arbitraria, è una conseguenza ovvia del caos deterministico. Ma questo limite non ha affatto come conseguenza l'impossibilità di una qualche forma di previsione accurata. Come sottolineato con forza da Thom, è un'ovvia banalità il fatto che *ogni modello è "deterministico" in quanto vuole dirci qualche cosa, specificare e determinare in qualche modo la nostra conoscenza*<sup>10</sup>.

Con la scoperta del caos è necessario riprendere in considerazione il ruolo della probabilità e della descrizione statistica in fisica. Ruolo già evidenziato nel XIX secolo da Maxwell e Boltzmann nell'ambito della termodinamica. Studiare un gas a partire dalle interazioni tra le molecole oltre ad essere difficile è anche fuorviante; decisamente più appropriata è una descrizione statistica che, sfruttando l'altissimo numero di particelle in gioco, permetta l'utilizzo del calcolo delle probabilità e quindi un approccio in termini di variabili macroscopiche come pressione, temperatura etc: *per un numero molto grande di particelle compaiono nuove leggi del tutto particolari. Queste sono le cosiddette leggi statistiche dovute proprio alla presenza di un grande numero di particelle che costituiscono il corpo, leggi in nessun caso riconducibili a leggi puramente meccaniche.*<sup>11</sup>

Indipendentemente dai fiumi d'inchiostro versati nelle polemiche forse la rilevanza maggiore della scoperta del caos è nell'aver chiarito come la validità dell'approccio statistico non è necessariamente limitata a sistemi con molti gradi di libertà. Ovviamente si deve adottare un approccio statistico se il numero dei gradi di libertà coinvolti è molto grande, ma anche in presenza del caos deterministico, indipendentemente dal numero (anche piccolo) di variabili coinvolte.

Sia nella descrizione statistica dei sistemi termodinamici che in quella dei sistemi caotici l'approccio probabilistico può essere considerato solo un metodo e la probabilità una mera necessità che riflette un'incapacità pratica di controllare esattamente il sistema. Nella meccanica statistica la difficoltà viene dall'alto numero di gradi di libertà; nei sistemi caotici dalla sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali. Potremmo dire che, in un certo senso, si continua ad assumere valido il punto di vista deterministico ma ci si accontenta di guardare l'oggetto in modo "grossolano".

Al contrario nella meccanica quantistica la probabilità è un elemento intrinseco; posizione ed impulso del sistema non sono più determinabili con precisione grande a piacere ma esiste un limite dato dal principio di indeterminazione di Heisenberg.

È interessante notare come la (ri)scoperta del caos ha contribuito a riconsiderare l'annosa questione sulla natura deterministica e/o probabilistica delle leggi fisiche. Poiché in presenza del caos si possono avere comportamenti irregolari (tradizionalmente associati a regole stocastiche) anche in sistemi deterministici non appare possibile decidere tra queste due tesi contrapposte:

I- le leggi che governano l'universo sono intrinsecamente aleatorie ed il determinismo che si crede di osservare è di fatto un risultato di natura probabilistica che segue dal grande numero di particelle coinvolte;

II- le leggi fondamentali sono deterministiche ed i fenomeni apparentemente aleatori sono in effetti dovuti al caos deterministico.

Sostanzialmente le due posizioni appena enunciate possono essere viste come una riformulazione del grande dibattito sulla meccanica quantistica: la tesi I è l'indeterminismo di principio della scuola di Copenhagen mentre la tesi II è un determinismo nascosto difeso da Einstein<sup>12</sup>.

### **Qualche osservazione finale**

La possibilità di comportamenti caotici in sistemi apparentemente semplici ha un impatto non banale per la modellizzazione di una gran classe di fenomeni. In tutti i casi (tanti) i cui non sia possibile determinare le equazioni di evoluzione da principi primi (come le leggi di Newton per la meccanica) è necessario ricorrere a considerazioni di tipo fenomenologico. Se il modello costruito è caotico allora si deve fare particolare attenzione alla sua reale rilevanza. Infatti modificando leggermente i parametri di controllo (oppure le condizioni iniziali) il risultato può cambiare in modo drammatico.

Non si intende dire che i modelli caotici siano inutili. Cosa si può realmente ottenere da tali modelli? Certamente non sono attendibili le previsioni puntuali (che succede un certo giorno); tuttavia previsioni di tipo meno accurato (cosa succede in media in un mese) possono essere precise e questo (può suonare paradossale) proprio per la presenza del caos.

Il caos non è interessante solo per le previsioni meteorologiche ed i dibattiti sulle interpretazioni della realtà. È rilevante anche in molti aspetti pratici della vita quotidiana come l'economia, la finanza e la politica.

Per molto tempo la formulazione matematica dell'economia è stata basata sull'assunzione di comportamenti regolari, ad esempio periodici, e la convinzione di poterli controllare modificando i parametri di controllo, cioè agendo sui tassi di interesse, svalutazione, tasse etc. Sostanzialmente è la stessa idea di von Neumann che credeva di poter controllare l'atmosfera.

Ovviamente l'economia e la finanza non mostrano affatto andamenti regolari ed i politici non sono in grado di controllare molto. Ora anche gli economisti si interessano di modelli caotici ed alcuni risultati sembrano mettere in discussione alcuni dei paradigmi classici. Ad esempio è stato recentemente mostrato come in un regime di duopolio i produttori ottengono maggiori profitti in un mercato con andamento caotico rispetto a quelli ottenuti in un mercato che si assesta su valori di equilibrio stabile, in netto contrasto con l'opinione ampiamente diffusa che sono preferibili sistemi stabili rispetto a quelli con continue variazioni<sup>13</sup>. Al di là dell'importanza teorica e concettuale di tali studi<sup>14</sup>, impietosamente si potrebbe ricordare che illustri esperti sono riusciti a guidare la politica finanziaria di non pochi paesi con articoli contenenti banali errori di aritmetica<sup>15</sup>; forse a questi consulenti strapagati il caos non interessa.

Un aspetto delicato della politica italiana è il sistema elettorale, quello attualmente in vigore (il ben noto Porcellum) ha prodotto risultati non entusiasmanti. Un interessante studio<sup>16</sup> mostra come il premio di maggioranza al Senato possa essere praticamente imprevedibile: piccole variazioni del numero di voti nelle varie regioni possono portare a notevoli variazioni nel numero dei seggi, stravolgendo la significatività del voto popolare. Siamo in presenza di una situazione del tutto simile a quella dei sistemi caotici: il risultato può dipendere molto da dettagli a prima vista irrilevanti.

Nonostante Poincaré abbia chiaramente stigmatizzato gli eccessi di un empirismo ingenuo: *la scienza si costruisce con i fatti, come una casa con le pietre; ma una raccolta di fatti non è una scienza più di quanto un mucchio di sassi non sia una casa*, attualmente esiste una nefasta corrente di pensiero che vede come unico ingrediente rilevante nella scienza i dati. Secondo questo punto vista, che purtroppo prende sempre più piede, *visto che siamo nell'era dei dati in abbondanza si può fare a meno delle teorie, basta usare i dati* (queste sono le parole del guru informatico C. Anderson)<sup>17</sup>.

I sostenitori del Big Data fanno interdere che usando la grande quantità di dati a disposizione si potrebbe determinare in modo empirico le equazioni di evoluzione di un qualunque fenomeno. Tutto ciò è solo una favola per ingenui<sup>18</sup>: se il sistema è descritto da un numero (relativamente) alto di variabili, diciamo più di 5 o 6, allora inevitabilmente i metodi basati solo su lo studio delle serie storiche sono destinati al fallimento<sup>19</sup>. Addirittura anche se le equazioni del moto fossero perfettamente note, confidare troppo sulla mole delle osservazioni è una grande ingenuità: se il sistema è caotico, per quanto la precisione possa essere alta dopo un tempo relativamente breve si



perde il controllo del sistema.

## Note

<sup>1</sup> P.S. Laplace *Essai philosophique sur les probabilités*, traduzione italiana in *Opere di P.S. Laplace* (Utet, 1967)

<sup>2</sup> Per una breve presentazione del contributo di Poincaré al caos:

A. Guerraggio *15 grandi idee matematiche* (Bruno Mondadori, 2013);

Tra le opere non tecniche di Poincaré è altamente consigliato un classico dell'alta divulgazione, sempre attuale anche dopo un secolo:

J.H. Poincaré *La scienza e l'ipotesi* (Bompiani, 2003)

<sup>3</sup> Per un'introduzione non troppo tecnica al caos:

D. Ruelle *Caso e caos* ( Bollati Boringhieri, 1992);

A. Vulpiani *Determinismo e Caos* (Carocci, 2004).

<sup>4</sup> E. Lorenz *Deterministic Nonperiodic Flow* J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).

<sup>5</sup> J. Gleick *Caos: la nascita di una nuova scienza* (Rizzoli, 1989)

Buon esempio di giornalismo scientifico, solo qualche riserva sull' eccessiva attenzione ai contributi statunitensi e la poca concessa al resto del mondo.

<sup>6</sup> Possiamo citare i lavori sulla stabilità di Lyapunov (inizio del XX secolo); la teoria del controllo di Andronov e Wiener (a partire dagli anni venti); i modelli non lineari di Volterra per i problemi biologici (anni trenta); i teoremi ergodici di Birkhoff e von Neumann (anni trenta); la teoria dell' informazione di Shannon ed il suo uso per i sistemi dinamici (Kolmogorov e Sinai) negli anni quaranta; gli esperimenti numerici di Fermi, Pasta ed Ulam (anni 50); gli studi sulla meccanica analitica di Kolmogorov (e poi Arnold e Moser) negli anni cinquanta e sessanta.

<sup>7</sup> J. Ford *How random is a coin toss?*, Physics Today **36** (April), 40 (1983).

<sup>8</sup> K. Pomian (a cura di) *Sul Determinismo* (Il Saggiatore, 1991).

<sup>9</sup> R. Thom in K. Pomian, cit. pag. 47.

<sup>10</sup> R. Thom in K. Pomian, cit. pag. 120.

<sup>11</sup> L.D. Landau e E.M. Lifshitz *Fisica Statistica* (Editori Riuniti, 1978).

<sup>12</sup> A. Pais *Sottile è il Signore ...* (Bollati Boringhieri, 1986).

<sup>13</sup> G.I. Bischi *Caos deterministico e previsioni economiche*, Lettera Matematica PRISTEM **74-75**, 112 (2010).

<sup>14</sup> Ci sarebbe da discutere se l'economia e la finanza siano regolate da leggi deterministiche o ci siano aspetti intrinsecamente aleatori.

<sup>15</sup> L'allusione è al famoso (famigerato) caso C. Reinhart e K. Rogoff, si veda

ad esempio The New Yorker, 29 aprile 2013.

<sup>16</sup> A. Petri, F. Dalton e G. Pontuale *Un sistema elettorale tutto da rifare*, Le Scienze, settembre 2006, pagina 62.

<sup>17</sup> C. Anderson *The end of theory: the data deluge makes the scientific method obsolete* Wired Magazine 23 giugno 2008.

<sup>18</sup> Ed anche per i pigri che si illudono che usando software scaricato dalla rete sia possibile evitare di studiare tecniche matematica avanzate.

<sup>19</sup> F. Cecconi, M. Cencini, M. Falcioni and A. Vulpiani *The prediction of future from the past: an old problem from a modern perspective* Am. J. Phys. **80**, 1001 (2012).

Si veda anche il Dossier *La scienza delle previsioni* Le Scienze giugno 2013, pag. 32- 61, con articoli di F. Cecconi, M. Cencini, C. Chiarabba, F. Sylos Labini, S. Tibaldi, P. Vineis e A. Vulpiani.

## **L' AUTORE**

Angelo Vulpiani è attualmente Professore Ordinario di Fisica Teorica presso il Dipartimento di Fisica dell' Università di Roma La Sapienza.

Si interessa di caos e complessità nei sistemi dinamici, meccanica statistica e fenomeni di trasporto.