Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti e A. Vulpiani
Compito del 28.06.2017

Es. 1

Si consideri un sistema costituito da N coppie indipendenti di particelle identiche di massa m vincolate a muoversi su un cerchio di raggio R centrato nell'origine ed interagenti con energia potenziale:

$$V(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = A\,|\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|^4, \qquad |\mathbf{q}_1| = |\mathbf{q}_2| = R,$$

dove $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i)$ con $i = 1, 2$ sono posizioni delle due particelle della coppia sul cerchio ed $A > 0$ una costante positiva arbitraria.

Assumendo che il sistema in equilibrio alla temperatura T sia descrivibile dalla meccanica statistica classica, si chiede di calcolare:

1.a) L'energia per coppia $E(T)/N$ nel limite $T \ll AR^4$.

1.b) La probabilità $P(\epsilon > 3T)$ che l'energia cinetica ϵ di una data coppia di particelle sia maggiore di $3T$;

1.c) La probabilità $P(x > R/2)$ che la coordinata x di una delle due particelle della coppia sia maggiore di $R/2$.

Nota: Si utilizzi l'approssimazione di picco valida per temperature sufficientemente basse.

Es. 2

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche non interagenti con L'Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p, q) = a|p| + b|q|, \qquad q \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R},$$

dove $a > 0$ e $b > 0$ sono costanti positive arbitrarie.

Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0, si chiede:

2.a) Mostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.

2.b) Calcolare la frazione di particelle nello stato condensato a temperatura $T = T_\mathrm{c}/2$.

Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2, si chiede:

2.c) Il numero massimo $N_\mathrm{m}(L)$ di particelle tale che a $T = 0$ tutte le particelle si trovino nella regione $|q| < L$.

• Valutazione risposte:
1.a: 5, 1.b: 5, 1.c: 5
2.a: 5, 2.b: 5, 2.c: 5

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) La funzione di partizione canonica per un sistema di N coppie indipendenti di particelle classiche si scrive $Z_N = Z_2^N/N!$ dove Z_2 è la funzione di partizione della singola coppia:

$$Z_2 = \int \frac{d\mathbf{p}_1\, d\mathbf{p}_2\, d\mathbf{q}_1\, d\mathbf{q}_2}{2h^2}\, e^{-\beta H(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)},$$

e l'integrazione è vincolata sul cerchio di raggio R. Introducendo le variabili angolari θ_1 e θ_2 che identificano la posizione delle due particelle sul cerchio, l'Hamiltoniana diventa

$$H(p_{\theta_1}, p_{\theta_2}, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2m}\big(p_{\theta_1}^2 + p_{\theta_2}^2\big) + 4AR^4\big[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)\big]^2,$$

dove $p_{\theta_i} = mR\dot{\theta}_i$ sono gli impulsi angolari coniugati. Sostituendo si ha

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \int \frac{dp_{\theta_1}\, dp_{\theta_2}\, Rd\theta_1\, Rd\theta_2}{2h^2}\, e^{-\frac{\beta}{2m}(p_{\theta_1}^2+p_{\theta_2}^2)-4\beta AR^4[1-\cos(\theta_2-\theta_1)]^2} \\
&= \frac{\pi R^2 m}{h^2\beta} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1\, d\theta_2\, e^{-4\beta AR^4[1-\cos(\theta_2-\theta_1)]^2} \\
&= \frac{2\pi^2 R^2 m}{h^2\beta} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-4\beta AR^4[1-\cos\theta]^2}.
\end{aligned}$$

L'integrale non è esprimibile in termini di funzione note, tuttavia nel limite $T \ll AR^4$, i.e., $\beta AR^4 \gg 1$, l'integrando è esponenzialmente piccato intorno al suo massimo per $\theta = 0$. In questo limite possiamo quindi approssimare $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$ cosicché

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-4\beta AR^4[1-\cos\theta]^2} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} d\theta\, e^{-\beta AR^4\theta^4} = \frac{2}{(\beta AR^4)^{1/4}}\frac{1}{4}\int_0^{\infty} dt\, t^{1/4-1}\, e^{-t} = \frac{\Gamma(1/4)}{2R(\beta A)^{1/4}}.$$

per cui

$$Z_2 = \frac{\pi^2 Rm\,\Gamma(1/4)}{A^{1/4}h^2\beta^{5/4}}, \qquad T \ll AR^4.$$

Conoscendo Z_N l'energia del sistema si ottiene dalla relazione $E(T) = -(\partial/\partial\beta)\ln Z_N$, che utilizzando le espressioni trovate fornisce:

$$\boxed{E(T)/N \simeq \frac{5}{4}T, \qquad T \ll AR^4.}$$

1.b) La densità di probabilità $P(\epsilon)$ dell'energia cinetica ϵ della coppia di particelle è data da:

$$P(\epsilon) = \int dp_{\theta_1}\, dp_{\theta_2}\, d\theta_1\, d\theta_2\, P(p_{\theta_1}, p_{\theta_2}, \theta_1, \theta_2)\, \delta\Big((p_{\theta_1}^2 + p_{\theta_2}^2)/2m - \epsilon\Big),$$

dove

$$P(p_{\theta_1}, p_{\theta_2}, \theta_1, \theta_2) = \frac{R^2}{2h^2 Z_2}\, e^{-\frac{\beta}{2m}(p_{\theta_1}^2+p_{\theta_2}^2)-4\beta AR^4[1-\cos(\theta_2-\theta_1)]^2},$$

è il peso statistico della configurazione $(p_{\theta_1}, p_{\theta_2}, \theta_1, \theta_2)$ di una coppia di particelle. Usando i risultati del punto precedente segue facilmente che:

$$P(\epsilon) = \beta\, e^{-\beta\epsilon},$$

per cui la probabilità richiesta è data da

$$P(\epsilon > 3T) = \int_0^{\infty} d\epsilon\, \beta e^{-\beta\epsilon}\, \theta\big(\epsilon - 3T\big) = \int_3^{\infty} dt\, e^{-t}$$

ovvero

$$\boxed{P(\epsilon > 3T) = e^{-3}.}$$

1.c) La densità di probabilità di trovare una particella della coppia a θ_1 e l'altra a θ_2 è data da,

$$P(\theta_1,\theta_2) = \int dp_{\theta_1}\, dp_{\theta_2}\, P(p_{\theta_1}, p_{\theta_2}, \theta_1, \theta_2) = \frac{e^{-4\beta A R^4[1-\cos(\theta_2-\theta_1)]^2}}{2\pi \int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, e^{-4\beta A R^4[1-\cos\theta]^2}} \equiv P(\theta_2-\theta_1).$$

Siccome la coppia è simmetrica per lo scambio delle due particelle possiamo scegliere arbitrariamente la coordinata della particella 1 o 2, per cui la probabilità richiesta vale

$$P\big(x > R/2\big) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1 \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2\, P(\theta_1,\theta_2)\, \theta\big(\cos\theta_1 - 1/2\big),$$

che sfruttando

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2\, P(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2\pi},$$

diventa

$$P\big(x > R/2\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta_1\, \theta\big(\cos\theta_1 - 1/2\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\theta_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right],$$

ovvero

$$\boxed{P\big(x > R/2\big) = \frac{1}{3}.}$$

2.a Per un sistema composto da Bosoni il numero di particelle a temperatura T è pari a $N = N_0 + \tilde{N}$; dove N_0 è il numero di particelle nello stato condensato ($\epsilon = \epsilon_{\rm min}$) ed $\tilde{N}$ il numero di particelle nello stato non-condensato ($\epsilon > \epsilon_{\rm min}$). Quest'ultimo per Bosoni di spin 0 è dato da,

$$\tilde{N} = \int_{\epsilon_{\rm min}}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1},$$

dove $G(\epsilon)$ è la densità degli stati di singola particella:

$$G(\epsilon) = \int \frac{dp\, dq}{h}\, \delta\big(\epsilon - H(p,q)\big) = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \delta\big(\epsilon - a|p| - b|q|\big),$$

ed $\epsilon_{\rm min} = 0$. Gli integrali si calcolano direttamente ottenendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \delta\big(\epsilon - a|p| - b|q|\big) = 2\int_{0}^{+\infty} dq\, \delta\big(\epsilon - a|p| - bq\big) = \frac{2}{b}\, \theta\big(\epsilon - a|p|\big)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \delta\big(\epsilon - a|p|\big) = 2\int_{0}^{+\infty} dp\, \theta\big(\epsilon - ap\big) = \frac{2}{a}\, \epsilon\, \theta(\epsilon),$$

e quindi, otteniamo

$$G(\epsilon) = \frac{4}{abh}\, \epsilon\, \theta(\epsilon).$$

Alla temperatura critica $\mu = \epsilon_{\rm min} = 0$, e quindi a $T_{\rm c}$

$$N = \int_{0}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{4}{abh}\int_{0}^{+\infty} d\epsilon \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}.$$

Vicino al limite di integrazione inferiore $\epsilon = 0$ si ha $\epsilon/(e^{\beta\epsilon} - 1) \sim 1/\beta$, ne segue che

$$\boxed{\int_{0}^{\infty} d\epsilon\, \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1} < \infty, \qquad \Rightarrow \text{Esiste condensazione BE.}}$$

2.b L'equazione che determina la temperatura di condensazione T_c è:

$\tilde{N}(T_\mathrm{c}) = N$

dove, dal punto precedente,

$$\tilde{N}(T) = \frac{4}{abh}\int_0^{+\infty} d\epsilon \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1} = \frac{4}{abh\beta^2}\int_0^{+\infty} dy \frac{y}{e^y-1} = \frac{4T^2}{abh}\zeta(2) = \frac{2\pi^2 T^2}{3abh}.$$

poichè $\zeta(2) = \pi^2/6$.
La frazione di particelle nello stato consensato a $T < T_\mathrm{c}$ è,

$N_0(T)/N = 1 - \tilde{N}(T)/N$

che sfruttando la condizione $N = \tilde{N}(T_\mathrm{c})$ e la forma esplicita di $\tilde{N}(T)$, vale

$$N_0(T)/N = 1 - \left(\frac{T}{T_\mathrm{c}}\right)^2.$$

Di conseguenza

$$\boxed{N_0(T_\mathrm{c}/2)/N = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.}$$

2.c Nel caso le particelle siano Fermioni di spin 1/2, il numero di particelle a $T = 0$ è dato da

$$N = 2\int_0^{\epsilon_\mathrm{F}} d\epsilon\, G(\epsilon),$$

dove $G(\epsilon)$ è la stessa calcolata per il caso dei Bosoni, e di nuovo $\epsilon_\mathrm{min} = 0$.
Affinchè tutte le particelle a $T = 0$ si trovino nella regione $|q| < L$ è necessario che $\epsilon_\mathrm{F} \le bL$, per cui il numero massimo possibile è

$$N_\mathrm{m}(L) = 2\int_0^{bL} d\epsilon\, G(\epsilon) = \frac{8}{abh}\int_0^{bL} d\epsilon\,\epsilon$$

Ovvero

$$\boxed{N_\mathrm{m}(L) = \frac{4b}{ah}L^2.}$$