Corso di Meccanica Statistica, A.A. 2014-2015
Compito del 2 febbraio 2015

Un SOLO libro, niente appunti, quaderni, ecc.
Scrivere sul primo foglio in alto a sinistra Nome (solo iniziale) e Cognome in stampatello, ad es. L. BOLTZMANN

Un sistema è costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, che si muovono nella regione piana $(-\infty < x < +\infty; \quad 0 \leq y \leq L)$ con hamiltoniana di singola particella:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + ax^4$$

dove $a > 0$ è una costante.

A) Supponendo che si possa applicare la statistica classica (statistica di Boltzmann) e il sistema sia in equilibrio alla temperatura T,
A_1) calcolare U, l' energia media del sistema;
A_2) determinare la densità di probabilità dell' energia di una particella.

B) Supponendo che le particelle siano bosoni di spin zero,
B_1) mostrare che esiste la condensazione di Bose-Einstein e determinare T_c;
B_2) calcolare $N_0(T = T_c/2)$, numero medio di bosoni nello stato fondamentale per $T = T_c/2$.

C) Nel caso di fermioni di spin 1/2 determinare il massimo valore di N affinché, a $T = 0$, per tutte le particelle del sistema si abbia $|x| \leq L$.

(Si possono lasciare indicati integrali contenenti solo variabili adimensionali)

SOLUZIONE

A$_1$) Per un gas perfetto

$$U = N\langle H \rangle \ .$$

Usando il teorema di equipartizione si ottiene

$$\Big\langle \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} \Big\rangle = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT$$

e

$$\langle a x^4 \rangle = \frac{1}{4}kT$$

da cui:

$$U = N\ \frac{5}{4}kT \ .$$

In alternativa si può scrivere

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z \ ,$$

dove

$$z = \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_0^L \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\mathbf{p}\ e^{-\beta[\mathbf{p}^2/2m]}\ e^{-\beta[a x^4]} \ ,$$

$$z = \frac{L}{h^2}\ 2\pi m k T\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-\beta[a x^4]} \ ;$$

con il cambiamento di variabile $ax^4 = kTu$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-\beta[a x^4]} = 2 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-\beta[a x^4]}$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}u\ \frac{1}{4}\ \Big(\frac{kT}{a}\Big)^{1/4}\ \frac{e^{-u}}{u^{3/4}} = \frac{1}{2}\ \Big(\frac{kT}{a}\Big)^{1/4}\ \Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)$$

da cui infine

$$z = \frac{L\pi m}{h^2 a^{1/4}}\ \Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)\ \beta^{-5/4}$$

e

$$\langle H \rangle = \frac{5}{4}kT$$

A$_2$) Dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{e^{-\beta H(\mathbf{x}, \mathbf{p})}}{\int \mathrm{d}\mathbf{x}' \mathrm{d}\mathbf{p}' e^{-\beta H(\mathbf{x}', \mathbf{p}')}} \ ,$$

integrando sugli stati con energia ϵ, si ottiene

$$\rho(\epsilon) = \frac{\omega(\epsilon)\ e^{-\beta\epsilon}}{\int \mathrm{d}\mathbf{x}' \mathrm{d}\mathbf{p}' e^{-\beta H(\mathbf{x}', \mathbf{p}')}} \ ,$$

dove si è posto

$$\omega(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}\Sigma(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_{H\le\epsilon} \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\int_{(\mathbf{p}^2/2m)+ax^4\le\epsilon} \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{p}\ .$$

$$\Sigma(\epsilon) = L\int_{-(\epsilon/a)^{1/4}}^{+(\epsilon/a)^{1/4}} \mathrm{d}x \int_{\mathbf{p}^2\le 2m(\epsilon-ax^4)} \mathrm{d}\mathbf{p} = L\ 2\int_0^{+(\epsilon/a)^{1/4}} \mathrm{d}x\ 2m\pi(\epsilon - ax^4)$$

cioè

$$\Sigma(\epsilon) = \frac{16}{5}\ \frac{\pi m L}{a^{1/4}}\ \epsilon^{5/4} \quad \text{e quindi} \quad \omega(\epsilon) = \frac{4\pi m L}{a^{1/4}}\ \epsilon^{1/4}\ .$$

Se nella domanda precedente era stata calcolata la z, si può scrivere

$$\rho(\epsilon) = \frac{\omega(\epsilon)\ e^{-\beta\epsilon}}{\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{p}' e^{-\beta H(\mathbf{x}',\mathbf{p}')}} = \frac{\omega(\epsilon)\ e^{-\beta\epsilon}}{h^2 z}\ ,$$

da cui

$$\rho(\epsilon) = \frac{4\ \epsilon^{1/4}\ e^{-\beta\epsilon}}{\Gamma(\frac{1}{4})(kT)^{5/4}} = \frac{\epsilon^{1/4}\ e^{-\beta\epsilon}}{\Gamma(\frac{5}{4})(kT)^{5/4}}\ .$$

Se la z non era stata calcolata, si ottiene lo stesso risultato scrivendo

$$\rho(\epsilon) = \frac{\omega(\epsilon)\ e^{-\beta\epsilon}}{\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\mathrm{d}\mathbf{p}' e^{-\beta H(\mathbf{x}',\mathbf{p}')}} = \frac{\omega(\epsilon)\ e^{-\beta\epsilon}}{\int_0^\infty \mathrm{d}\epsilon'\ \omega(\epsilon')\ e^{-\beta\epsilon'}} = \frac{(\epsilon)^{1/4}\ e^{-\beta\epsilon}}{\int_0^\infty \mathrm{d}\epsilon'\ (\epsilon')^{1/4}\ e^{-\beta\epsilon'}}\ .$$

$\mathbf{B}_1$) Il numero medio di bosoni nel sistema è dato da

$$N = \int_0^\infty \frac{G(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon}{(1/f)e^{\beta\epsilon} - 1}\ ,$$

dove la densità degli stati è

$$G(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\,\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\ \frac{g}{h^2}\int_{H\le\epsilon} \mathrm{d}\mathbf{x}\mathrm{d}\mathbf{p} = \frac{g}{h^2}\ \omega(\epsilon)$$

e per bosoni di spin 0, $g = 1$. Essendo $G(\epsilon) \propto \epsilon^{1/4}$, l'integrale per N, per ogni fissata temperatura, risulta finito per $f = 1$ e quindi limitato superiormente per ogni $f < 1$. Si ha quindi la condensazione di Bose-Einstein. La temperatura di condensazione si può ricavare introducendo la variabile adimensionale $u = \epsilon/kT$ e scrivendo

$$N = \frac{4\pi m L}{h^2 a^{1/4}}\ (kT)^{5/4}\int_0^\infty \frac{u^{1/4}\mathrm{d}u}{(1/f)e^{u} - 1} = \frac{4\pi m L}{h^2 a^{1/4}}\ (kT)^{5/4}\ I_{1/4}(f)\ ;$$

questa equazione definisce T_c ponendo $f = 1$

$$N = \frac{4\pi m L}{h^2 a^{1/4}}\ (kT_c)^{5/4}\ I_{1/4}(f = 1)\ .$$

$\mathbf{B}_2$) Dato che per $T < T_c$

$$N_{\epsilon>0} = \frac{4\pi mL}{h^2 a^{1/4}}\,(kT)^{5/4}\int_0^\infty \frac{u^{1/4}\mathrm{d}u}{e^u - 1} = \frac{4\pi mL}{h^2 a^{1/4}}\,(kT)^{5/4}\, I_{1/4}(f=1)\;;$$

e quindi

$$N_{\epsilon>0} = \Big(\frac{T}{T_c}\Big)^{5/4} N$$

segue che

$$N_0(T = T_c/2) = \left(1 - \Big(\frac{T}{T_c}\Big)^{5/4}\right) N = \left(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{5/4}\right) N$$

C) Perché sia soddisfatta la condizione $|x| < L$ gli stati occupati a $T = 0$ devono avere energie $\epsilon < aL^4$ per cui $\epsilon_F \leq aL^4$; il numero massimo di fermioni è quindi

$$N_{max} = \mathcal{N}(\epsilon_F = aL^4) = \frac{g}{h^2}\,\Sigma(\epsilon = aL^4)$$

con $g = 2$

$$N_{max} = \frac{32}{5}\frac{\pi mL}{h^2 a^{1/4}}\,a^{5/4}L^5 = \frac{32}{5}\frac{\pi ma}{h^2}L^6$$