Corso di Meccanica Statistica
Proff. M. Falcioni, A. Vulpiani
A.A. 2013-2014 – Compito del 4/2/2014

Scrivere in stampatello COGNOME e N. *(iniziale del nome)*
(Esempio: ROSSI M.)

Si consideri un gas unidimensionale costituito da N particelle identiche, non interagenti, di massa m, vincolate a muoversi nell' intervallo $0 \leq x \leq 3L$, con Hamiltoniana di singola particella data da

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(x) \,,$$

dove il potenziale $V(x)$ è così definito:

$$\begin{array}{rrll} V(x) = & 0 & \text{se} & 0 \leq x < L \\ V(x) = & V_0 & \text{se} & L \leq x < 2L \\ V(x) = & 2\,V_0 & \text{se} & 2L \leq x \leq 3L \end{array}$$

con $V_0 > 0$.

1)– Assumendo che valga la statistica di Boltzmann e che il gas sia in equilibrio alla temperatura T,

a) si calcoli l' energia media del sistema, $U(T)$;

b) indicando con E_c l'energia cinetica di 3 date particelle, calcolare la densità di probabilità $p(E_c)$.

2)– Nel caso che le particelle siano fermioni identici,

a) calcolare il numero massimo N_m di fermioni che può contenere il sistema affinché a $T = 0$ non ci siano particelle nella zona $x > L$;

b) calcolare $U(T = 0)$ per $\epsilon_F = 3V_0$.

3)– Nel caso di bosoni di spin 0 discutere se in questo sistema esiste la condensazione di Bose-Einstein.

MECCANICA STATISTICA

4 FEBBRAIO 2014

SOLUZIONE

1a) $$z = \int \frac{dx\,dp}{h} \exp\left\{-\beta\left(\frac{p^2}{2m}\right)\right\} \exp\left\{-\beta V(x)\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2} \left\{ \int_0^L dx + \int_L^{2L} dx\, e^{-\beta V_0} + \int_{2L}^{3L} dx\, e^{-2\beta V_0} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi m}}{h} \beta^{-1/2} L \left\{ 1 + e^{-\beta V_0} + e^{-2\beta V_0} \right\}$$

$$\frac{U}{N} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = \frac{1}{2\beta} + \frac{V_0 e^{-\beta V_0} + 2 V_0 e^{-2\beta V_0}}{1 + e^{-\beta V_0} + e^{-2\beta V_0}}$$

1b) $$p(p_1, p_2, p_3) = p(p_1)\cdot p(p_2)\cdot p(p_3) =$$

$$= \frac{e^{-\beta \frac{p_1^2}{2m}}\, e^{-\beta \frac{p_2^2}{2m}}\, e^{-\beta \frac{p_3^2}{2m}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dp_1\, dp_2\, dp_3\, e^{-\beta (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2/2m)}}$$

$$E_c = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{p_3^2}{2m}$$

$$p(E_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(p_1, p_2, p_3)\, \delta\left(\frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} - E_c\right) dp_1\, dp_2\, dp_3$$

$$= \frac{G(E_c)\, e^{-\beta E_c}}{\int_0^{\infty} G(E_c)\, e^{-\beta E_c}\, dE_c}$$

$$G(E_c) = \frac{d}{dE_c} \mathcal{N}(E_c)$$

$$\mathcal{N}(E_c) = \int\limits_{\frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2m} \le E_c} dp_1\, dp_2\, dp_3 = \frac{4}{3}\pi\,(2m E_c)^{3/2}$$

$$G(E_c) = 2\pi\,(2m)^{3/2}\, E_c^{1/2}$$

$$p(E_c) = \frac{E_c^{1/2}\, e^{-\beta E_c}}{\int_0^\infty E_c^{1/2}\, e^{-\beta E_c}\, dE_c} = \frac{E_c^{1/2}\, e^{-\beta E_c}}{(KT)^{3/2}\sqrt{\pi}/2}$$

2a) $\epsilon_F \le V_0 \qquad \epsilon_{F\,max} = V_0 \qquad$ (assumo $s = \frac{1}{2}$)

$$N_m = \mathcal{N}(\epsilon = V_0) = 2 \int\limits_{\frac{p^2}{2m} + V(x) \le V_0} \frac{dx\, dp}{h}$$

$$= \frac{2}{h} \int_0^L dx \int\limits_{\frac{p^2}{2m} \le V_0} dp = \frac{2L}{h}\, 2\,(2mV_0)^{1/2}$$

2b) $U_0 = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon\, G(\epsilon)\, d\epsilon \qquad \epsilon_F > 2V_0$ quindi

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{2}{h}\left\{ \int_0^L dx \int\limits_{\left(\frac{p^2}{2m}\right) \le 2m\epsilon} dp + \int_L^{2L} dx \int\limits_{\left(\frac{p^2}{2m} + V_0\right) \le \epsilon} dp + \int_{2L}^{3L} dx \int\limits_{\left(\frac{p^2}{2m} + 2V_0\right) \le \epsilon} dp \right\}$$

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{2L}{h}\left\{ 2\sqrt{2m\epsilon} + 2\sqrt{2m(\epsilon - V_0)}\;\theta(\epsilon - V_0) + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{2m(\epsilon - 2V_0)}\;\theta(\epsilon - 2V_0) \right\}$$

$$G(\epsilon) = \frac{2L}{h}\sqrt{2m}\left\{ \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} + \frac{\theta(\epsilon - V_0)}{\sqrt{\epsilon - V_0}} + \frac{\theta(\epsilon - 2V_0)}{\sqrt{\epsilon - 2V_0}} \right\}$$

$$U_0 = \frac{2L}{h}\sqrt{2m}\left\{ \int_0^{\epsilon_F} \frac{\epsilon\, d\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} + \int_{V_0}^{\epsilon_F} \frac{\epsilon\, d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - V_0}} + \right.$$

$$\left. + \int_{2V_0}^{\epsilon_F} \frac{\epsilon\, d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - 2V_0}} \right\}$$

se $\quad \epsilon - V_0 = \epsilon_1 \qquad \epsilon - 2V_0 = \epsilon_2$

$$U_0 = \frac{2L}{h}\sqrt{2m}\left\{ \int_0^{\epsilon_F} \sqrt{\epsilon}\, d\epsilon + \int_0^{\epsilon_F - V_0} \frac{\epsilon_1 + V_0}{\sqrt{\epsilon_1}}\, d\epsilon_1 + \right.$$

$$\left. \int_0^{\epsilon_F - 2V_0} \frac{\epsilon_2 + 2V_0}{\sqrt{\epsilon_2}}\, d\epsilon_2 \right\} =$$

$$= \frac{2L}{h}\sqrt{2m}\;\frac{2}{3}\left\{ \epsilon_F^{3/2} + (\epsilon_F - V_0)^{3/2} + (\epsilon_F - 2V_0)^{3/2} + \right.$$

$$\left. + 3V_0(\epsilon_F - V_0)^{1/2} + 6V_0(\epsilon_F - 2V_0)^{1/2} \right\}$$

$$U_0 = U_0(\epsilon_F = 3V_0)$$

3) (Per bosoni con $s=0$ $G(\epsilon)$ è la metà di quella calcolata al punto 2)

$$N = \int_0^\infty \frac{G(\epsilon)\, d\epsilon}{\frac{1}{f} e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{L\sqrt{2m}}{h} \left[\int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon}\left(\frac{1}{f} e^{\beta\epsilon} - 1\right)} \right.$$

$$\left. + \int_{V_0}^\infty \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - V_0}\left(\frac{1}{f} e^{\beta\epsilon} - 1\right)} + \int_{2V_0}^\infty \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon - 2V_0}\left(\frac{1}{f} e^{\beta\epsilon} - 1\right)} \right]$$

per $f = 1$ gli ultimi 2 integrali sono FINITI

il primo è DIVERGENTE

(intorno a $\epsilon = 0$ l'integrale va come $\int \frac{d\epsilon}{\epsilon^{3/2}}$)

NON c'è condensazione di B.E.